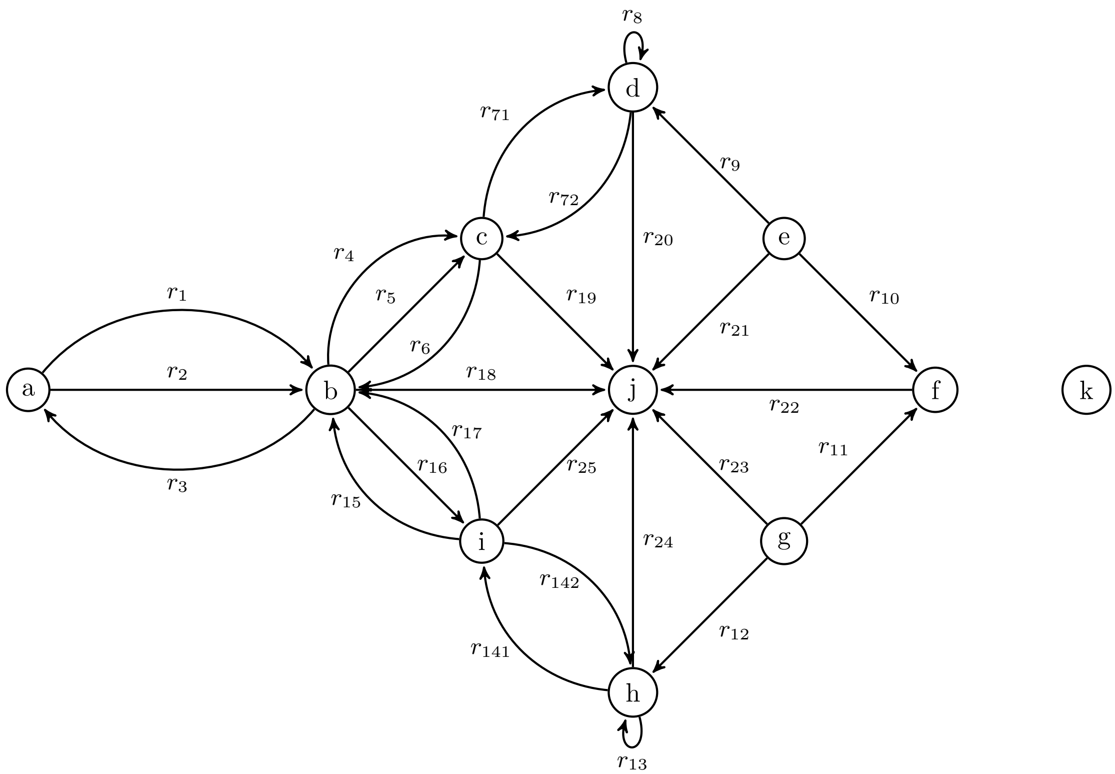
Testklausur Graphentheorie WS13/14

- Nehmen Sie sich nur einen Stift zum Bearbeiten!
- Sie haben 60 Minuten zum Bearbeiten der Testklausur.
- Jeder Punkt entspricht dabei einer Minute Bearbeitungszeit.

Aufgabe 1: Grundlagen **[27 Punkte]**

(a) [*17 Punkte*] Gegeben sei folgender Graph G:



1. Bestimmen sie alle Schlingen, sowie alle parallelen und inversen Pfeile. Sie können die zueinander parallelen/inversen Pfeile in einem Tupel (r_i, r_j) angeben.
2. Bestimmen sie $\delta^+(v)$, $\delta^-(v)$, $N^+(v)$, sowie $N^-(v)$ für alle $v \in \{j, k, b\}$
3. Bestimmen sie für alle Knoten den Innen- und Außengrad und bestimmen sie anschließend den Grad von G (hierfür bietet sich eine Tabelle an). Was ist der Minimal-, bzw. Maximalgrad von G?
4. Zeichnen sie den induzierten Subgraphen $G[d, e, f, g, h, j]$, sowie dessen inversen Graphen.
5. Zeichnen Sie die symmetrische und die einfache symmetrische Hülle der beiden Graphen aus Punkt 4.

(b) [*5 Punkte*] Gegeben sei eine Familie von einfachen Graphen $\mathcal{G}$ mit $|V| \geq 5$, und für einen Knoten v_0 gilt $g^+(v_0) = 0$. Für alle anderen Knoten $v \in V \setminus \{v_0\} : g^+(v) \geq 1$. Gibt es Graphen $G \in \mathcal{G}$ die keinen Kreis haben? Begründen Sie.

(c) [*5 Punkte*] Sei G ein schwach zusammenhängender gerichteter Graph mit $|V| \geq 2$ Ecken. Beweisen Sie, dass es dann eine Ecke $v \in V$ gibt, so dass $G - v$ ebenfalls schwach zusammenhängend ist. (Hinweis: Längste elementare Spur)

Aufgabe 2: Wege, Kreise, Zusammenhang [24 Punkte]

(a) [*14 Punkte*] Seien $G_1 = (V, E_1)$ und $G_2 = (V, E_2)$ ungerichtete, einfache Graphen mit gleicher Eckenmenge.
Der Graph $G_1 \triangle G_2 := (V, E_1 \triangle E_2)$ heißt *symmetrische Differenz* der beiden Graphen G_1 und G_2. Hier bezeichnet $\triangle$ die symmetrische Differenz auf Mengen, definiert durch $E_1 \triangle E_2 := (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$.
Zeigen Sie:

1. Sind G_1 und G_2 Eulersch, dann haben alle Ecken im Graphen $E_1 \triangle E_2$ geraden Grad.
2. Ist die symmetrische Differenz $G_1 \triangle G_2$ immer Eulersch?

(b) [*10 Punkte*] Wenn ein Graph Hamiltonsch ist, folgt daraus, dass der Graph Eulersch ist?

Aufgabe 3: Chordale Graphen [9 Punkte]

(a) [*8 Punkte*] Seien $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ Intervalle mit $a_j \leq b_j$. Der *Intervallgraph* G_Γ zu $\Gamma = \{I_1, \ldots, I_n\}$ ist dann der ungerichtete Graph $G_\Gamma = (\Gamma, E_\Gamma)$ mit Kantenmenge $E_\Gamma = \{(I_j, I_k) \mid I_j \neq I_k, I_j \cap I_k \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass jeder Intervallgraph chordal ist.

(b) [*1 Punkt*] Warum sind chordale Graphen bzgl. der Färbbarkeit interessant?