

Übungen zur Vorlesung  
**Graphentheorie**  
Winter 2013/14  
Blatt 2

**AUFGABE 1:**

1. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der ein maximales Matching in einem beliebigen bipartiten Graph findet.
2. Die Universität Freiburg hat 5 Studierende, die eine Hiwi-Stelle an einem der Lehrstühle besetzen können.

Arno, spezialisiert in Kommunikationssysteme, Betriebssysteme, Softwaretechnik und Künstliche Intelligenz

Bertram, spezialisiert in Kommunikationssysteme und Betriebssysteme

Cindy, spezialisiert in Kommunikationssysteme, Softwaretechnik und Bildanalyse

Daniela, spezialisiert in Kommunikationssysteme

Emma, spezialisiert in Betriebssysteme

Jeder der fünf Lehrstühle möchte genau einen HiWi einstellen, der auch in dem entsprechenden Gebiet spezialisiert ist.

- (a) Formalisieren Sie das Problem als Matchingproblem und geben Sie hierzu einen bipartiten Graphen an.
- (b) Finden sie mit Hilfe ihres Algorithmus aus Teil 1 ein maximales Matching.
- (c) Zeigen sie mit Hilfe des Heiratssatzes, dass es kein perfektes Matching gibt.

**AUFGABE 2:**

Zeigen Sie, dass der Teil b) von Lemma 3.3 falsch wäre, falls der gerichtete Graph  $G$  nicht als einfach vorausgesetzt wird: Geben sie für  $g \geq 2$  einen Graphen  $G$  mit  $g^+(v) \geq g$  für alle  $v \in V(G)$  aus, der keinen elementaren Kreis der Länge mindestens  $g + 1$  besitzt.

Zur Erinnerung:

**Lemma 1 (3.3 b)** *Sei  $G$  ein einfacher (gerichteter), endlicher Graph. Falls  $\exists g \geq 1$ , so dass für alle  $v \in V(G) : g^+(v) \geq g$ , dann existiert ein elementarer Kreis der Länge mindestens  $g + 1$ .*

### AUFGABE 3:

Ein zerstreuter Professor kann sich nie merken, in welcher Reihenfolge er sich anziehen soll. Er hat zehn Kleidungsstücke: Unterhose, Socken, Uhr, Gürtel, Jackett, Hemd, Unterhemd, Krawatte, Schuhe und Hose.

1. Stellen Sie einen gerichteten azyklischen Graphen auf, welcher die Kleidungsstücke als Ecken darstellt. Pfeile zwischen den Ecken existieren, falls eine Abhängigkeit besteht, z.B. Unterhemd  $\rightarrow$  Hemd.
2. Helfen Sie dem Professor, sich anzuziehen und erstellen Sie eine topologische Sortierung mit dem in der Vorlesung angegebenen Algorithmus.

### AUFGABE 4:

1. Geben sie einen Algorithmus an, der in Zeit  $O(n)$  feststellt, ob ein einfacher Graph  $G$  in Adjazenzmatrixspeicherung eine Ecke  $v$  mit  $g^+(v) = 0$  und  $g^-(v) = n - 1$  enthält ( $G$  kann höchstens eine solche Ecke enthalten).
2. Für einige Zwecke ist es dienlich, wenn der zu bearbeitende Graph einfach ist. Geben sie einen Algorithmus an, der in Zeit  $O(n + m)$  aus einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen in Adjazenzlisten-Repräsentation alle Parallelen und Schlingen entfernt.