Christian Schindelhauer

Freiburg, den 22. Januar 2014
Besprechung 29. Januar 2014

Übungen zur Vorlesung
Graphentheorie
Winter 2013/14
Blatt 5

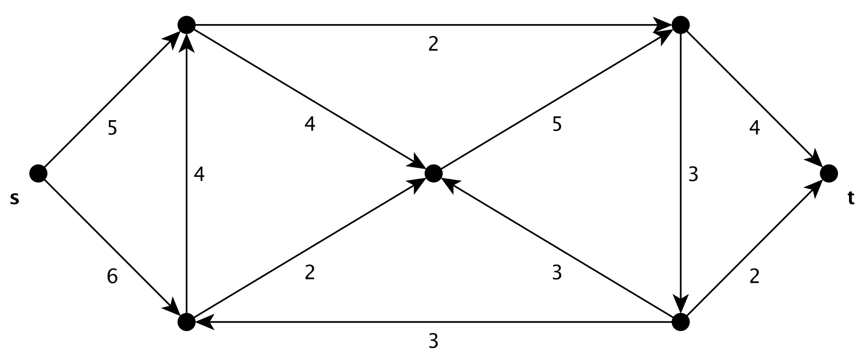
AUFGABE 1:
Der sequentielle Färbungsalgorithmus (Algorithmus 4.2) benutzt eine Eckenfolge π und kann in Abhängigkeit von der ausgewählten Folge ggf. unterschiedliche Farbanzahlen liefern. Sei π^+ eine Eckenfolge, bei der die Eckengrade schwach monoton steigen, π^- eine solche, mit schwach monoton fallenden Graden.
Gilt dann immer $F_{\pi^-}(G) \leq F_{\pi^+}(G)$?

Algorithmus 4.2 Sequentielles Färben

Input: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ in Adjazenzlistendarstellung
  Wähle eine Folge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aller Ecken
  Setze $f(v_1) := 1$
  for $i = 2, \ldots, n$ **do**
    färbe v_i mit der kleinesten natürlichen Zahl $q \in \mathrm{N}_+$, so dass für alle Kanten $[v_i, v_j] \in E(G_i)$ gilt: q ist nicht Farbe von v_j : $f(v_i) := q$;
  end for
  return $f : V \to \{1, \ldots, n\}$

AUFGABE 2:
Seien $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ Intervalle mit $a_j \leq b_j$. Der *Intervallgraph* G_Γ zu $\Gamma = \{I_1, \ldots, I_n\}$ ist dann der ungerichtete Graph $G_\Gamma = (\Gamma, E_\Gamma)$ mit Kantenmenge $E_\Gamma = \{[I_j, I_k] \mid I_j \neq I_k, I_j \cap I_k \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass jeder Invervallgraph chordal ist.

AUFGABE 3:
Berechnen Sie einen (s, t)-Fluss für folgenden Graphen. Gegeben sind die Kapazitäten.



AUFGABE 4:
Sei $G = (V, R)$ ein einfacher Graph mit ganzzahligen Kapazitäten $c(r) \in \mathbb{N}$ für $r \in R$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- Sind alle Kapazitäten gerade Zahlen, so existiert ein maximaler (s, t)-Fluss, der nur gerade Flusswerte besitzt.
- Sind alle Kapazitäten ungerade Zahlen, so existiert ein maximaler (s, t)-Fluss, der nur ungerade Flusswerte besitzt.

Die folgende Aufgabe ist optional:

AUFGABE 5:
Eines Tages erhielt Sherlock Holmes einen Besuch seines Freundes Dr. Watson. Watson war damit beauftragt worden, einen mysteriösen Mordfall aufzuklären, der sich vor über zehn Jahren ereignet hatte. Damals war der Duke of Densmore durch eine Bombenexplosion getötet worden. Bei der Explosion war auch das Castle Densmore zerstört worden, in dem der Duke seit seinem Ruhestand lebte. Die Zeitungen berichteten, dass der letzte Wille des Duke, der übrigens bei der Explosion ebenfalls vernichtet worden war, Anordnungen enthalten habe, die wohl jeder seiner sieben geschiedenen Ehefrauen missfielen. Kurz vor seinem Tod hatte der Duke jede einzelne für ein paar Tage auf sein Castle in die schottische Heimat eingeladen.

Holmes: *Ich erinnere mich noch genau an den Fall. Das Seltsame daran war, dass die Bombe genauso konstruiert worden war, dass sie in einer bestimmten Ecke des Schlafzimmers versteckt werden konnte. Das bedeutet, dass der Mörder das Castle mehrere Male besucht haben muss.*

Watson: *Das habe ich mir auch schon überlegt und daraufhin alle seine sieben Ehefrauen befragt. Jede hat aber beschworen, dass sie nur ein einziges Mal im Castle gewesen sei.*

Holmes: *Haben Sie gefragt, wann die einzelnen Personen das Castle besucht haben?*

Watson: *Unglücklicherweise erinnert sich keine von ihnen an das exakte Datum. Immerhin ist die Geschichte schon über zehn Jahre her! Dennoch erinnert sich jede genau daran, wen sie während ihres Aufenthaltes auf dem Castle getroffen hat.*

Ann traf Betty, Charlotte, Felicia und Georgina.
Betty traf Ann, Charlotte, Edith, Felicia und Helen.
Charlotte traf Ann, Betty und Edith.
Edith traf Betty, Charlotte und Felicia.
Felicia traf Ann, Betty, Edith und Helen.
Georgina traf Ann und Helen.
Helen traf Betty, Felicia und Georgina.

Holmes nahm einen Stift und zeichnete ein seltsames Bild, das Punkte enthielt, die mit A, B, C, E, F, G und H markiert und mit Linien verbunden waren. Weniger als 30 Sekunden später rief er aus: "Das ist es! Was Sie mir erzählen zeigt in eindeutiger Weise auf den Mörder!"
Finden Sie den Mörder des *Duke of Denmore*. Nehmen Sie dabei (wie auch Sherlock Holmes) an, dass genau eine Person gelogen hat.