Sven Köhler
Felix Schiller

Freiburg, den 11. Dezember 2015
Besprechung 18. Dezember 2015

Übungen zur Vorlesung
Graphentheorie
Winter 2015/16
Blatt 4

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Der Line-Graph $L(G)$ eines Eulerschen Graphen G ist Hamiltonsch.
2. Der Line-Graph $L(H)$ eines Hamiltonschen Graphen H ist Eulersch.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Betrachten Sie die Folgenden Eigenschaften ungerichteter, einfacher Graphen.

1. perfekt
2. chordal
3. zusammenhängend
4. Eulersch
5. Hamiltonsch
6. regulär

Zeigen Sie ob es einen nicht leeren Graphen gibt der

a) alle der Eigenschaften erfüllt.

b) keine der Eigenschaften erfüllt.

c) genau drei Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter einfacher Graph. Sei H der Graph mit

- $V(H) = \{v_i \mid v \in V \land 0 \leq i \leq g(v)\}$ und
- $E(H) = \{[v_i, v_j] \mid v \in V \land i \neq j\} \cup \{[u_i, v_i] \mid [u, v] \in E \land 0 \leq i \leq \min(g(u), g(v))\}$

Mit $C(v)$ bezeichnen wir die Menge $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{g(v)}\}$. Hinweis: $C(v)$ ist eine Clique in H. Eine unabhängige Menge ist bezüglich Inklusion maximal, wenn man keinen Knoten hinzunehmen kann, so dass die resultierende Menge ebenfalls unabhängig ist.

1. Beweisen Sie: Eine Funktion $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ ist genau dann eine k-Färbung, wenn alle Farbklassen $f^{-1}(i)$ mit $1 \leq i \leq k$ nicht leer und unabhängige Mengen sind

2. Beweisen Sie: Jede bezüglich Inklusion maximale unabhängige Menge von H enthält genau einen Knoten von jeder Clique $C(v), v \in V$.
3. Sei U eine bezüglich Inklusion maximale unabhängige Menge von H und f die Funktion, so dass $f(v) = i$ genau dann wenn $v_i \in U$. Dann ist f (bis auf Surjektivität) eine Färbung von G. Wie viele Farben werden maximal verwendet?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Perfektheit in Graphen bleibt unter Löschung von Kanten erhalten.
- Perfektheit in Graphen bleibt unter Kontraktion von Kanten erhalten.

  Durch Kontraktion einer Kante $[a, b]$ werden die Knoten a und b aus dem Graph gelöscht und durch einen neuen Knoten ab ersetzt. Alle Kanten die vorher inzident zu a oder b waren sind nach der Kontraktion inzident zu ab. Die kante $[a, b]$ wird nicht zu einer Schlingen sondern gelöscht. Entstehende Parallelen werden werden ebenfalls gelöscht. (Siehe such Definition 5.23 im Buch)

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit $|V| \geq 2$ Knoten. Beweisen Sie, dass es dann einen Knoten $v \in V$ gibt, so dass $G - v$ ebenfalls zusammenhängend ist. (Hinweis: Betrachten Sie den längsten elementaren Weg)