Informatik III

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Christian Schindelhauer

Wintersemester 2006/07

9. Vorlesung

22.11.2006

schindel@informatik.uni-freiburg.de

Turing-maschinen

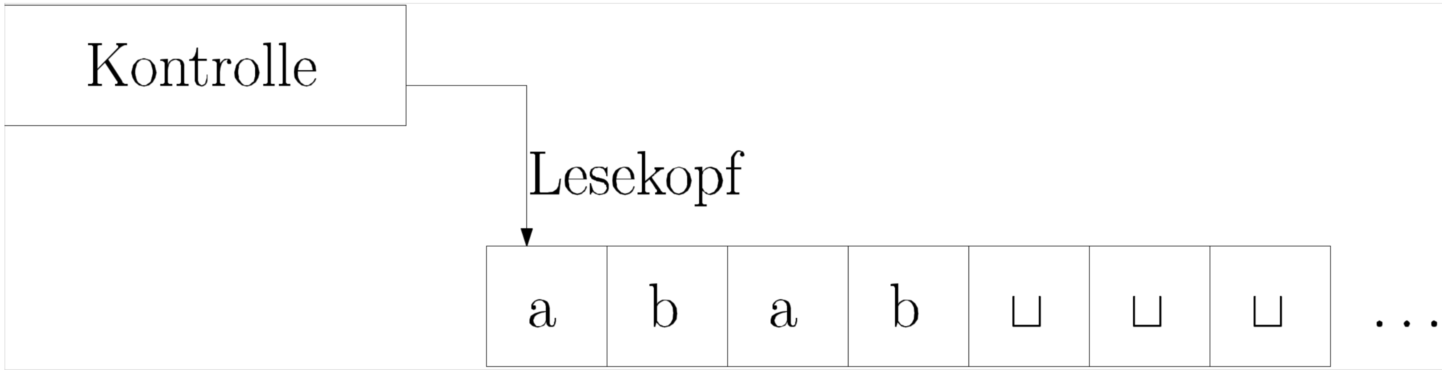
Turingmaschinen

- **DFA mit**
  - unbeschränktem Band

- **Eingabe steht zu Beginn am Anfang des Bands**
- **Auf dem Rest des Bandes steht _ (Blank)**
- **Position auf dem Band wird durch Lesekopf beschrieben**

Turingmaschinen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



- Der jeweils nächste Rechenschritt ist eindeutig festgelegt durch:
  aktuellen Zustand und gelesenes Zeichen.

- Der Rechenschritt: überschreibt das gelesene Zeichen durch neues Zeichen, bewegt Kopf nach rechts oder links, und verändert den Zustand.

Beispiel einer Turingmaschine

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Teste, ob ein Wort in der folgenden Sprache liegt:**
  - L = {w#w | w $\in$ {0, 1}* }

- **Vorgehensweise:**
  - Von links nach rechts über das Wort laufen
  - Erstes Zeichen links merken und markieren
  - Erstes Zeichen rechts von # vergleichen und markieren
  - Für alle Zeichen wiederholen bis erreicht
  - Links dürfen dann nur noch Blanks folgen
  - Falls Zeichen an einer Stelle nicht übereinstimmen ablehnen, sonst am Ende akzeptieren

Beispielrechnung einer Turingmaschine

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- `0 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 _ _ _ ...`
- `x 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 _ _ _ ...`
- `x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 _ _ _ ...`
- `x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 _ _ _ ...`
- `x x 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 _ _ _ ...`
- `x x x x x x # x x x x x x _ _ _ ...`

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Turingmaschinen

- **Eine (*deterministische 1-Band*) *Turingmaschine* (DTM) wird beschrieben durch ein 7-Tupel**
  - $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$.

- **Dabei sind Q, Σ, Γ endliche, nichtleere Mengen und es gilt:**
  - $F \subseteq Q$, $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$
  - $\vee \in \Gamma \cap \Sigma$ ist das *Blank*symbol.

- **Q ist die *Zustandsmenge***
- **Σ ist das *Eingabealphabet***
- **Γ das *Bandalphabet*.**

- **Zustände**
  - $q_0 \in Q$ ist der *Startzustand.*
  - $q_{accept} \in Q$ ist der akzeptierende Endzustand
  - $q_{reject} \in Q$ ist der ablehnende Endzustand

- **δ: $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ ist die (partielle) *Übergangsfunktion***
  - ist nicht definiert für $q \in \{q_{accept}, q_{reject}\} \subseteq \Gamma$ definiert

Arbeitsweise einer Turingmaschine

- **Initial:**
  - Eingabe steht links auf dem Band
  - Der Rest des Bands ist leer
  - Kopf befindet sich ganz links

- **Berechnungen finden entsprechend der Übergangsfunktion statt**

- **Wenn der Kopf sich am linken Ende befindet und nach links bewegen soll, bleibt er an seiner Position**

- **Wenn q_{accept} oder q_{reject} erreicht wird, ist die Bearbeitung beendet**

Konfiguration

- **Momentaufnahme einer TM**
  - Bei Bandinschrift uv
    - dabei beginnt u am linken des Bandes und hinter v stehen nur Blanks
  - Zustand q,
  - Kopf auf erstem Zeichen von v

- **Konfiguration C = u*qv***

Aufeinanderfolgende Konfigurationen

- **Gegeben: Konfigurationen C_1, C_2**

- **Wir sagen:**
  - **Konfiguration C_1 führt zu C_2**, falls die TM von C_1 in einem Schritt zu C_2 übergehen kann.

- **Formal:**
  - Seien a, b, c $\in \Gamma$, u, v $\in \Gamma^*$ und Zustände q_i , q_j gegeben
- **Wir sagen**
  - **u a q_i b v** führt zu **u q_j a c v**,
    - falls $\delta(q_i,b) = (q_j,c,L)$ und
  - **u a q_i b v** führt zu **u a c q_j v**,
    - falls $\delta(q_i,b) = (q_j,c,R)$

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Konfigurationen

- **Startkonfiguration:**
  - q_0w, wobei w die Eingabe ist
- **Akzeptierende Konfiguration:**
  - Konfigurationen mit Zustand q_{accept}
- **Ablehnende Konfiguration:**
  - Konfigurationen mit Zustand q_{reject}
- **Haltende Konfiguration:**
  - akzeptierende oder ablehnende Konfigurationen

Akzeptanz von Turingmaschinen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Eine Turingmaschine M akzeptiert eine Eingabe w, falls es eine Folge von Konfigurationen C_1, C_2, …, C_k gibt, so dass**
  - C_1 ist die Startkonfiguration von M bei Eingabe w
  - C_i führt zu C_{i+1}
  - C_k ist eine akzeptierende Konfiguration

- **Die von M akzeptierten Worte bilden die von M akzeptierte Sprache L(M)**

- **Eine Turingmaschine *entscheidet* eine Sprache, wenn jede Eingabe in einer haltende Konfiguration C_k resultiert**

Rekursive und rekursiv aufzählbare Sprachen

- **Eine Sprache L heißt *rekursiv aufzählbar*, falls es eine Turingmaschine M gibt, die L akzeptiert**

- **Eine Sprache L heißt *rekursiv* oder *entscheidbar*, falls es eine Turingmaschine M gibt, die L entscheidet**

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Beispiel für eine Turingmaschine

- **Gesucht: Turingmaschine, die**
  - $L = \{0^{2^n} \mid n \in \{0,1,2,...\}\}$
- **entscheidet**

- **Arbeitsweise:**
  1. Gehe von links nach rechts über die Eingabe und ersetze jede zweite 0 durch x
  2. Wenn nur eine 0 auf dem Band ist, akzeptiere
  3. Falls die Anzahl der 0en ungerade ist, lehne ab
  4. Bewege den Kopf zurück an das linke Ende

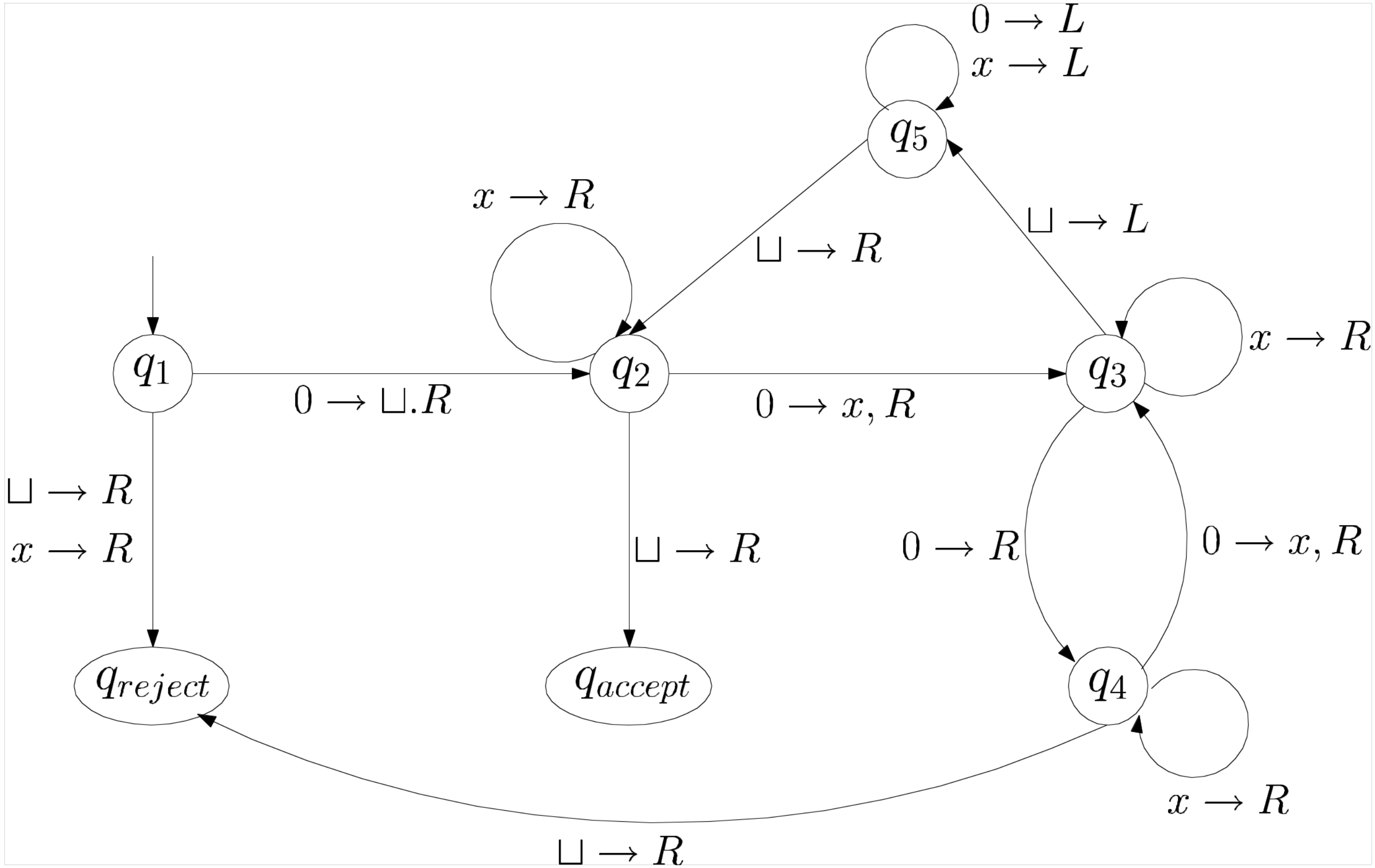
Beispiel

- **Definition der Turingmaschine:**
  - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{accept}, q_{reject}\}$
  - $\Sigma = \{0\}$
  - $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- **Besondere Zustände:**
  - Startzustand q_1
  - Akzeptierender Endzustand q_{accept}
  - Ablehnender Endzustand q_{reject}

- **Übergangsfunktion δ**

Darstellung von δ als Diagramm

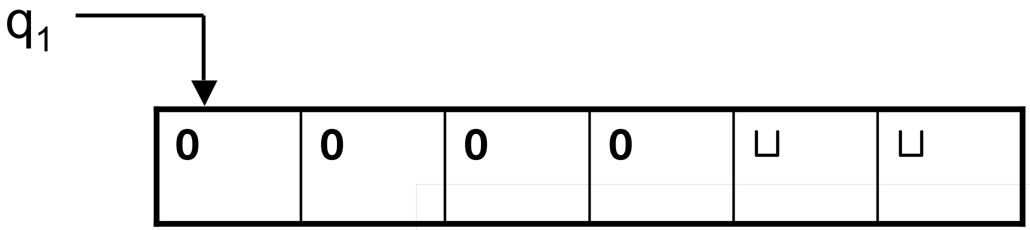
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



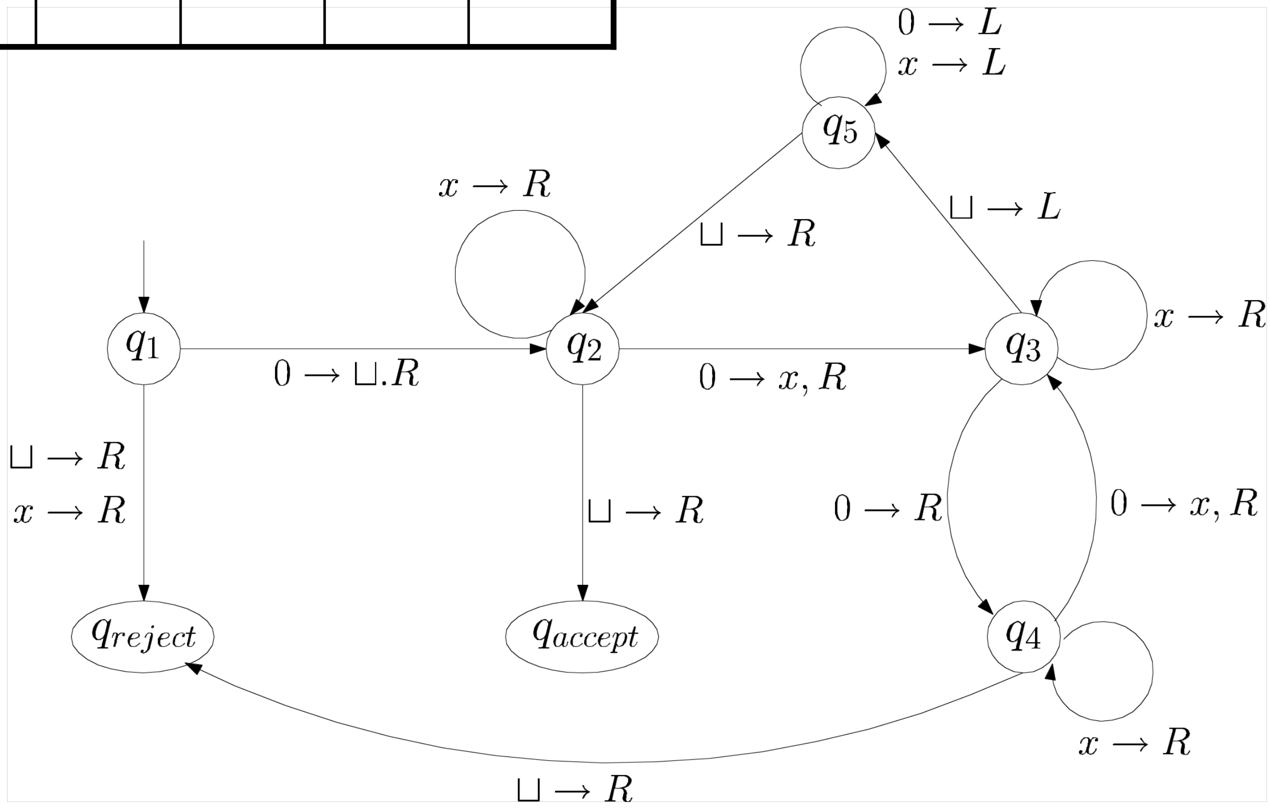
Darstellung von δ als Diagramm

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

δ	0	x	$\sqcup$
q_1	$(q_2, \sqcup, R)$	(q_{reject}, x, R)	$(q_{reject}, \sqcup, R)$
q_2	(q_3, x, R)	(q_2, x, R)	$(q_{accept}, \sqcup, R)$
q_3	$(q_4, 0, R)$	(q_3, x, R)	$(q_5, \sqcup, L)$
q_4	(q_3, x, R)	(q_4, x, R)	$(q_{reject}, \sqcup, R)$
q_5	$(q_5, 0, L)$	(q_5, x, L)	$(q_2, \sqcup, R)$



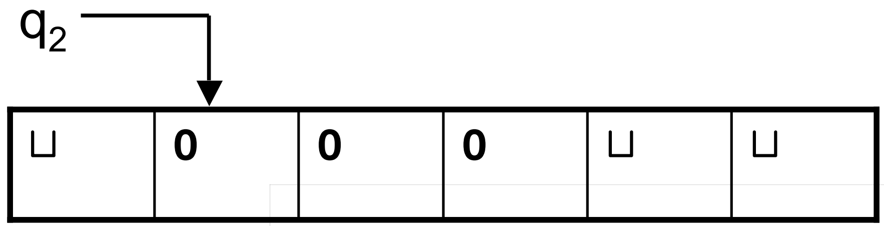
- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**



- **Startkonfiguration:**
- **$q_1$0000**

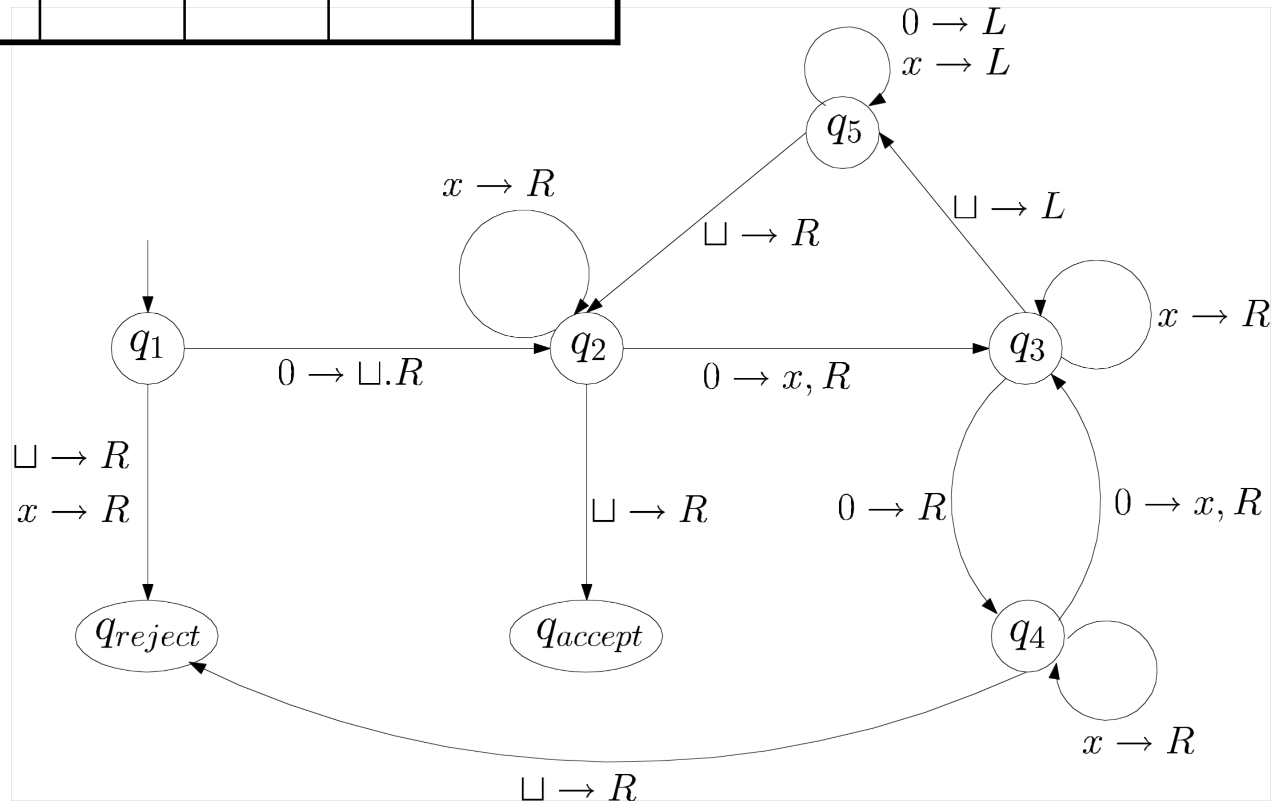
Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



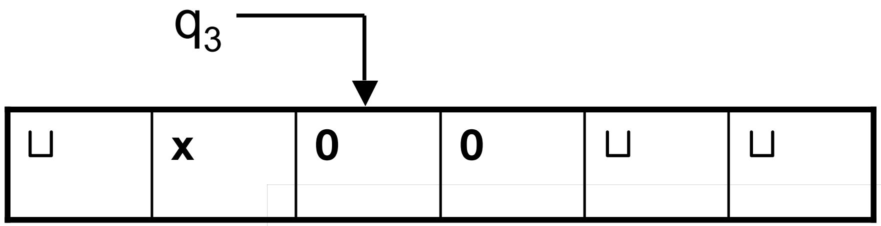
- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

- **Konfiguration:**
- **⊔$q_2$000**



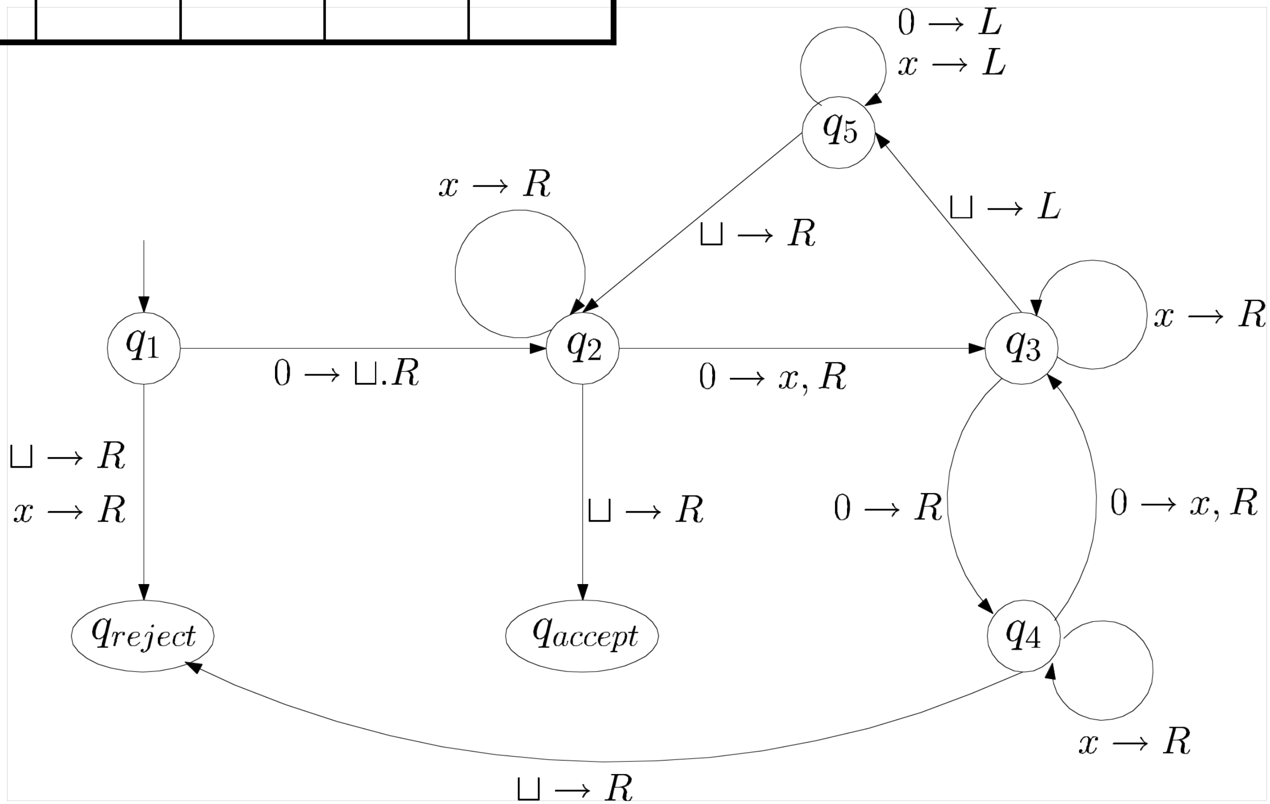
Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

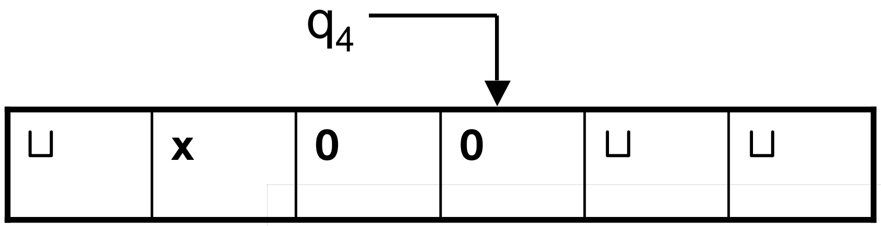


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

- **Konfiguration:**
- **⊔x$q_3$00**

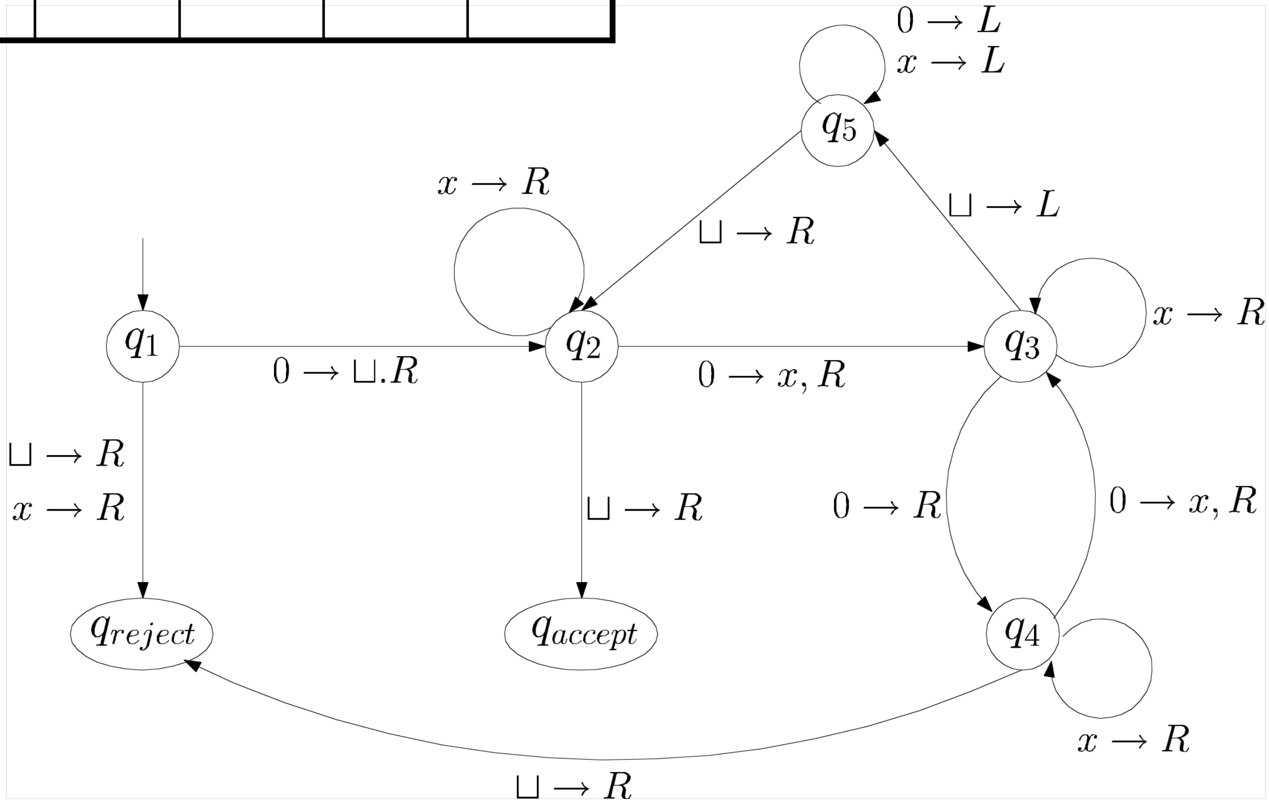


Abarbeitung eines Beispielworts



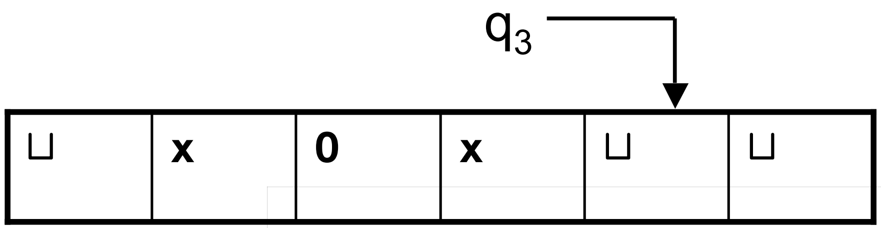
- Beispiel für das
- Wort: 0000

- Konfiguration:
- $\sqcup x0q_40$



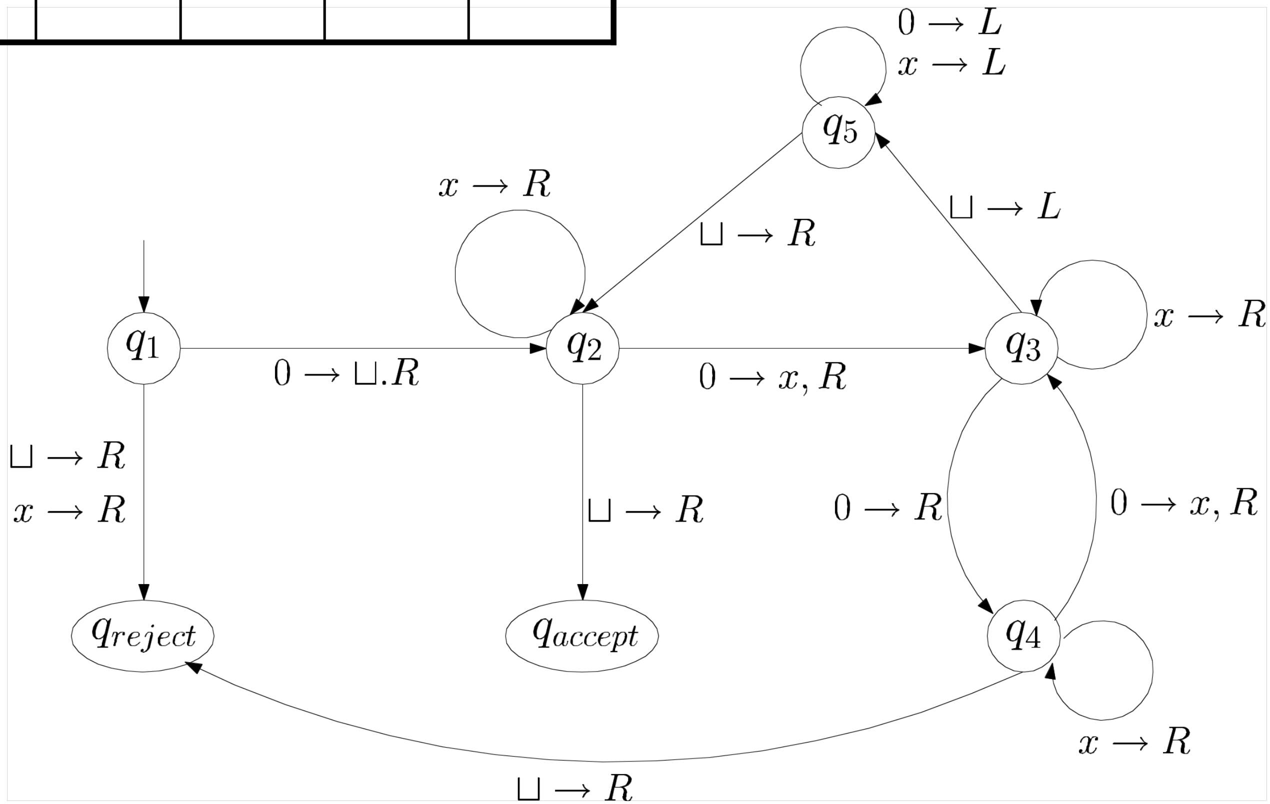
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Abarbeitung eines Beispielworts



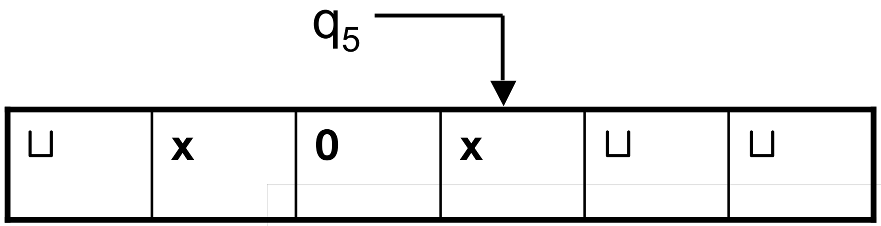
- Beispiel für das
- Wort: 0000

- Konfiguration:
- ⊔x0xq_3⊔

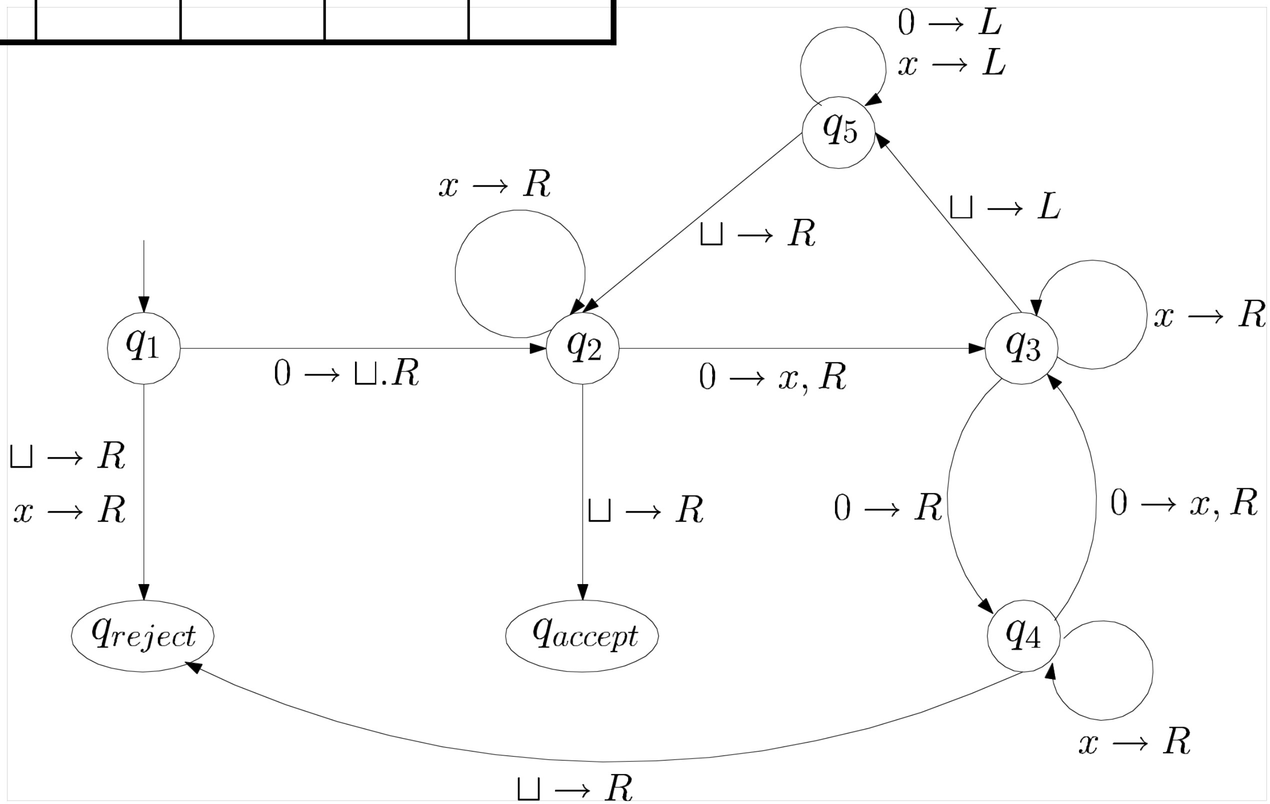


Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Abarbeitung eines Beispielworts

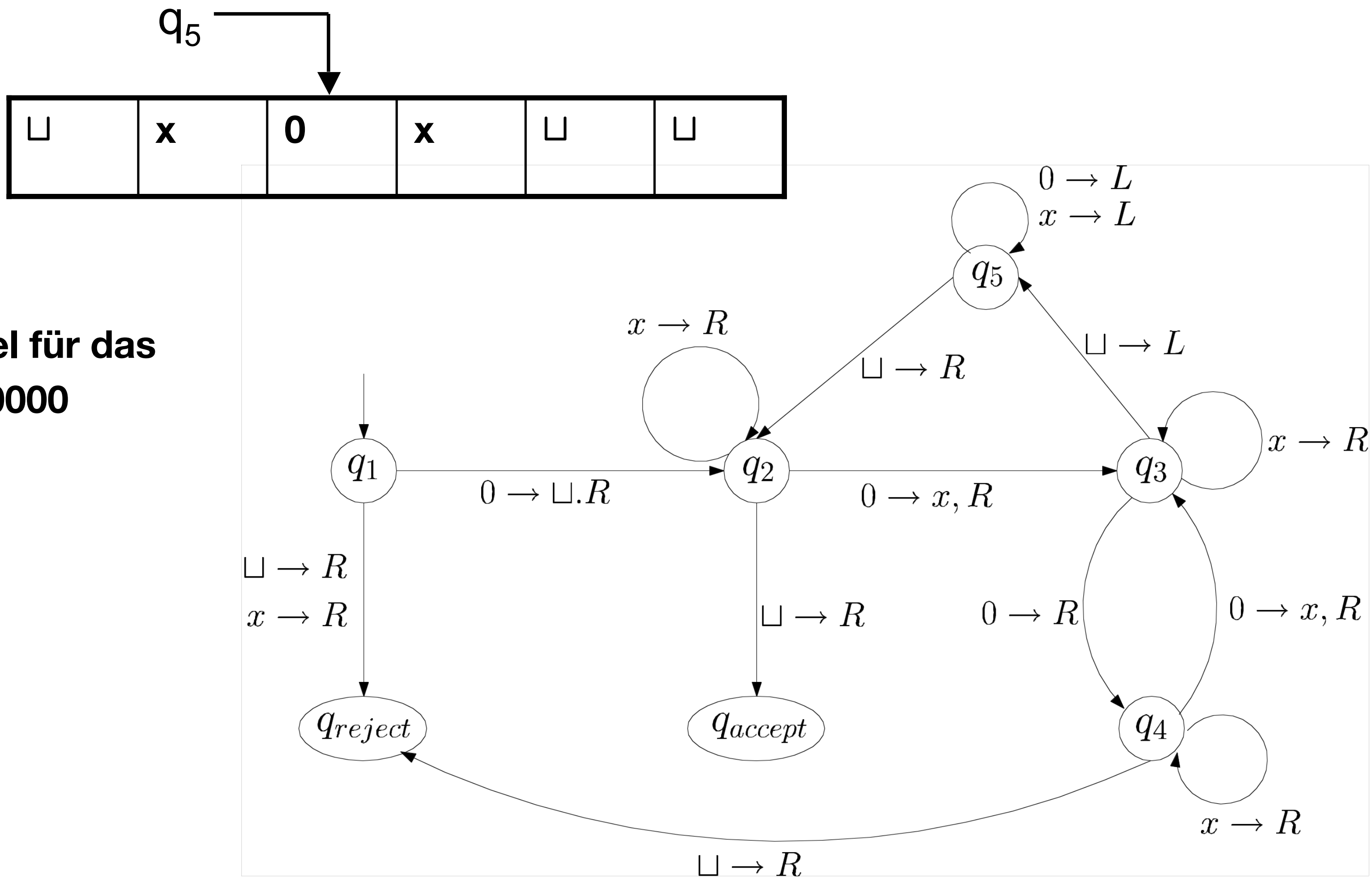


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**



Abarbeitung eines Beispielworts

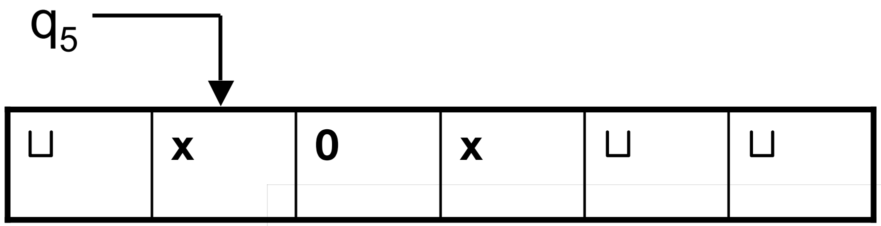
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



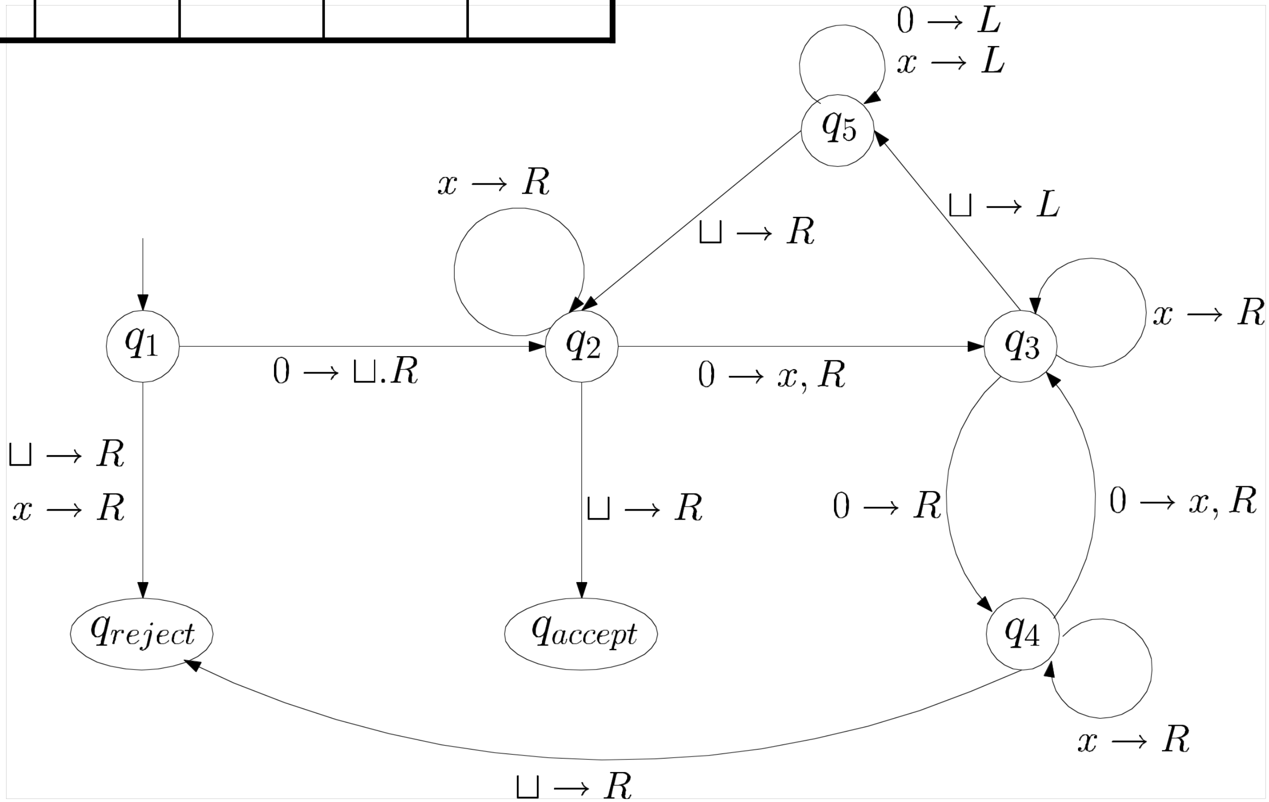
- Beispiel für das
- Wort: 0000

Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

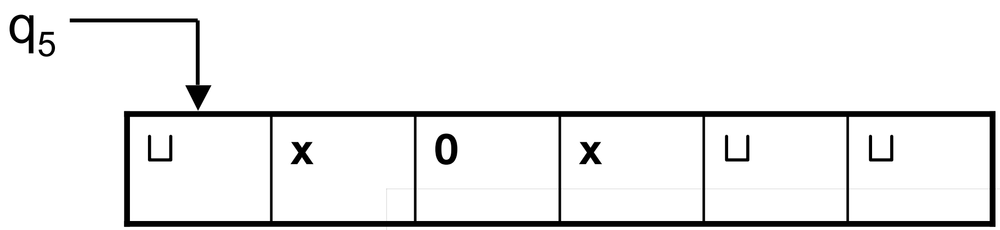


- Beispiel für das
- Wort: 0000

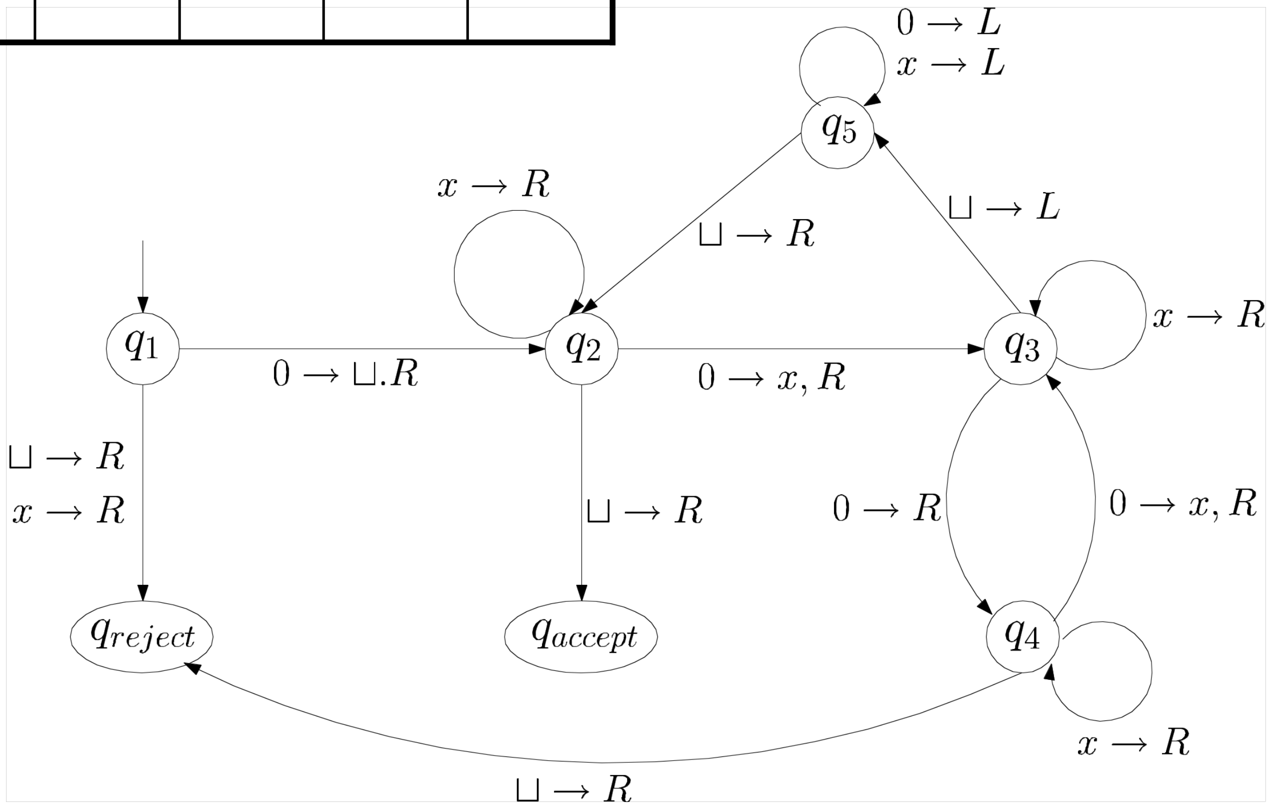


Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**



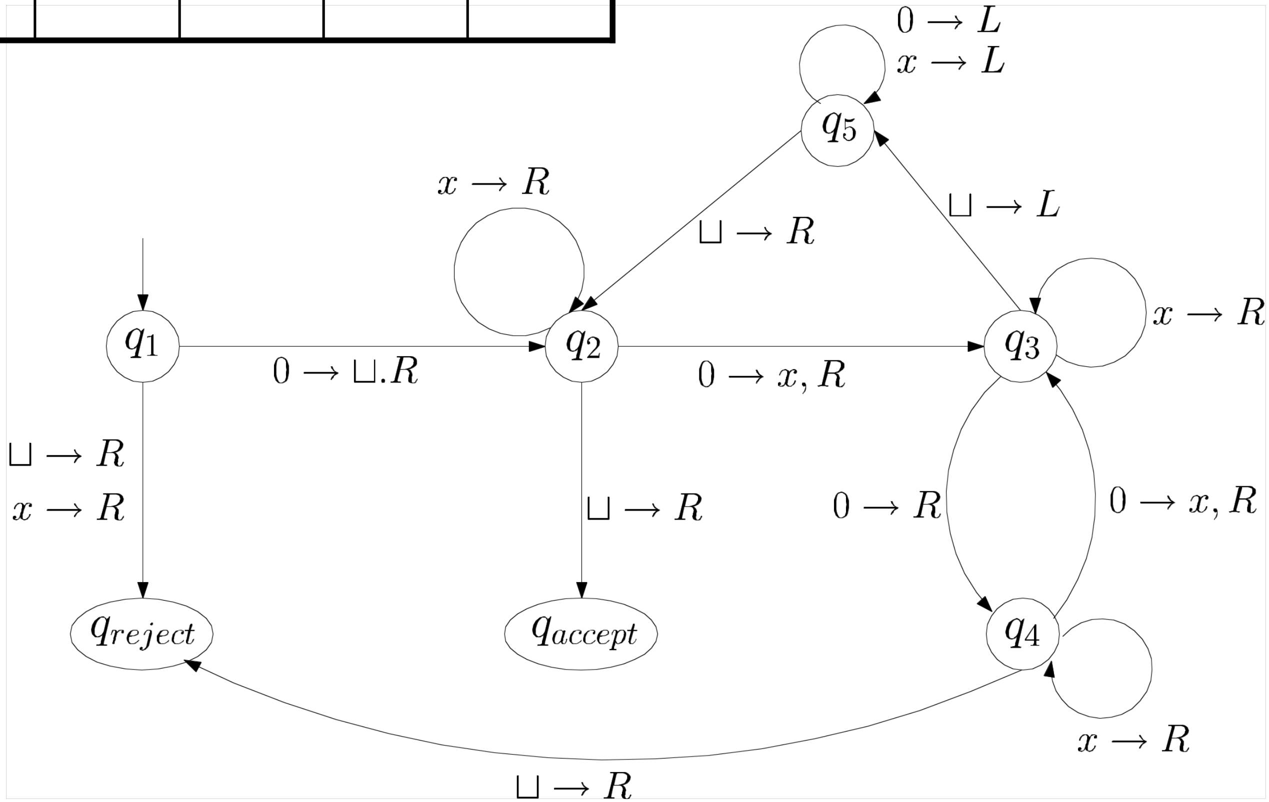
Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

q_2

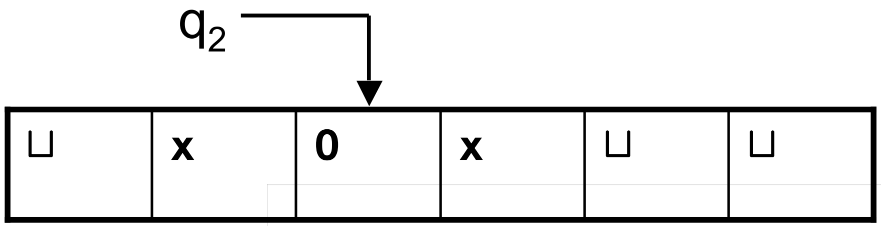
⊔	**x**	**0**	**x**	⊔	⊔

- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

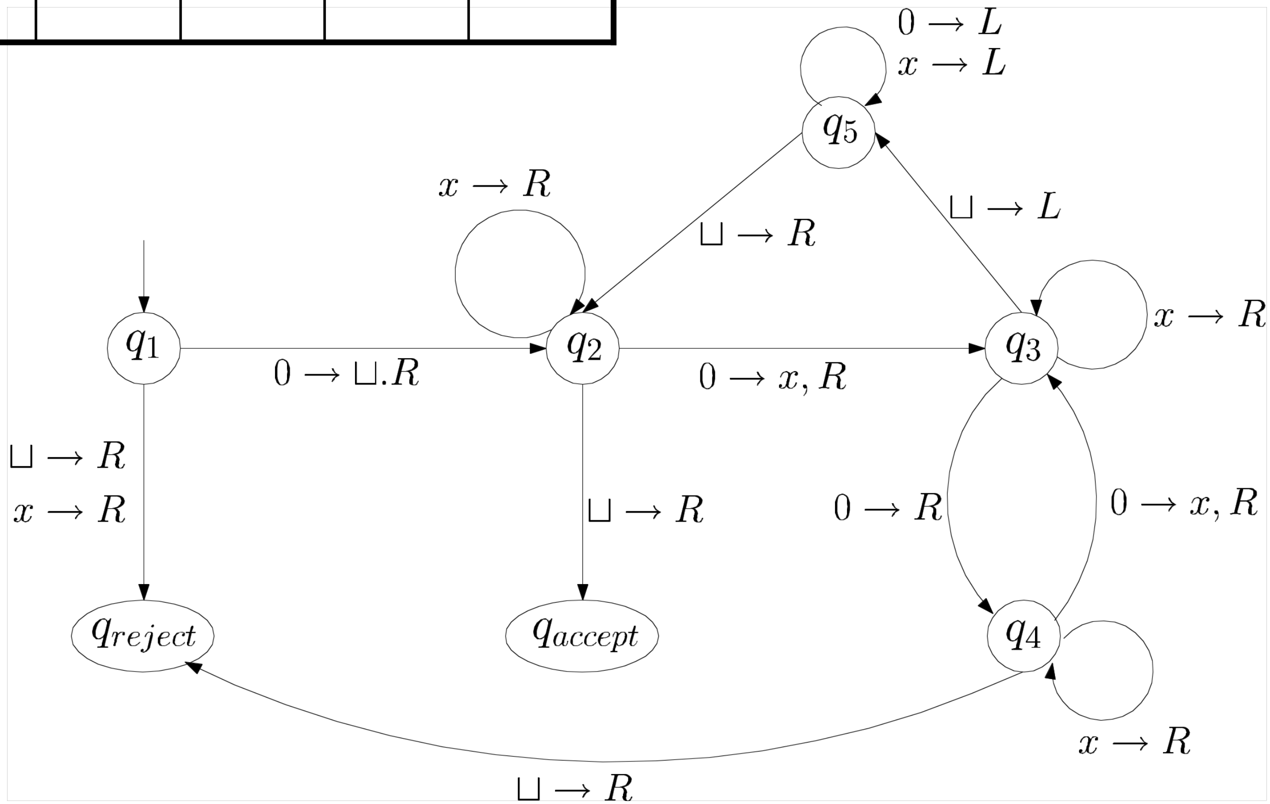


Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

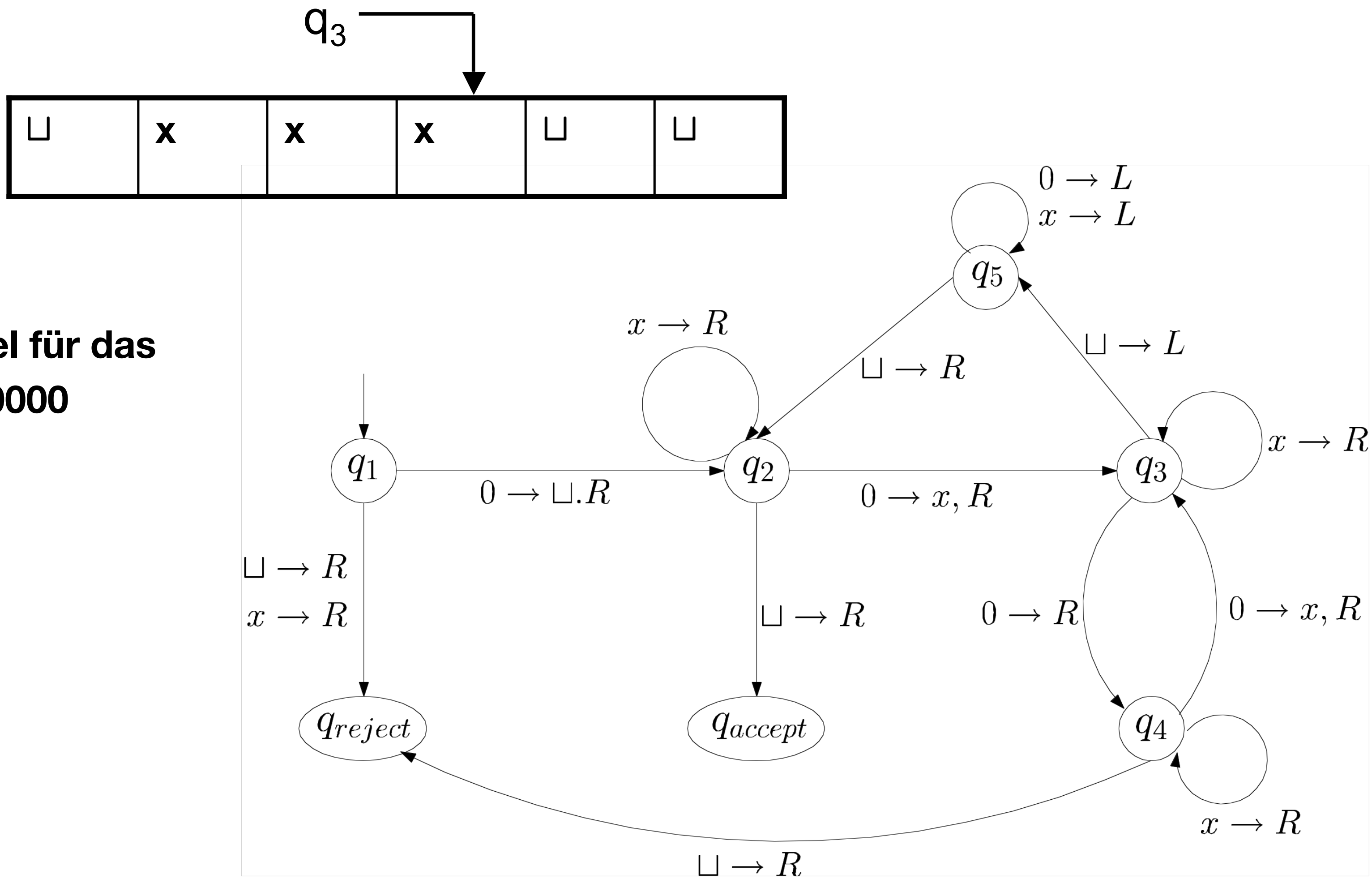


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**



Abarbeitung eines Beispielworts

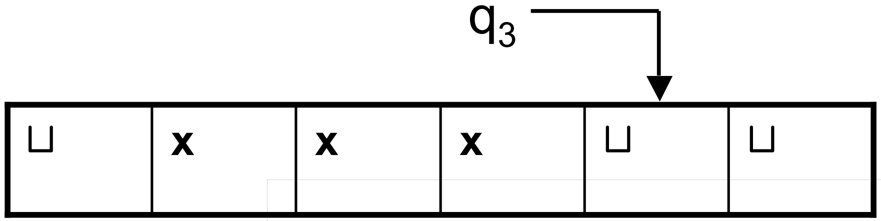
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



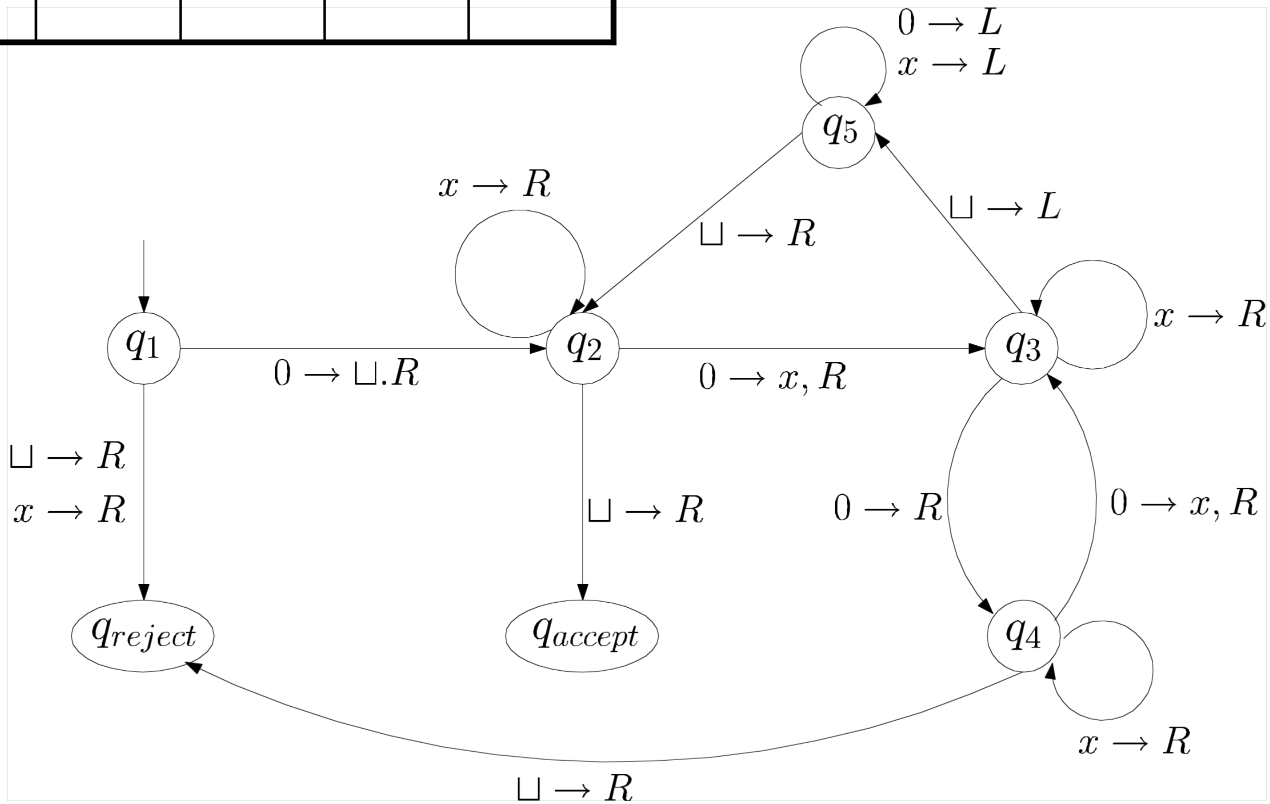
- Beispiel für das
- Wort: 0000

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Abarbeitung eines Beispielworts

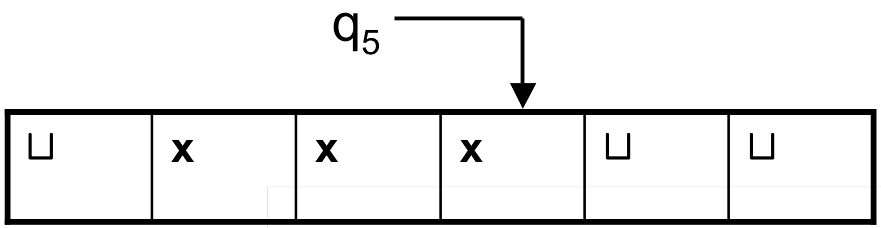


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

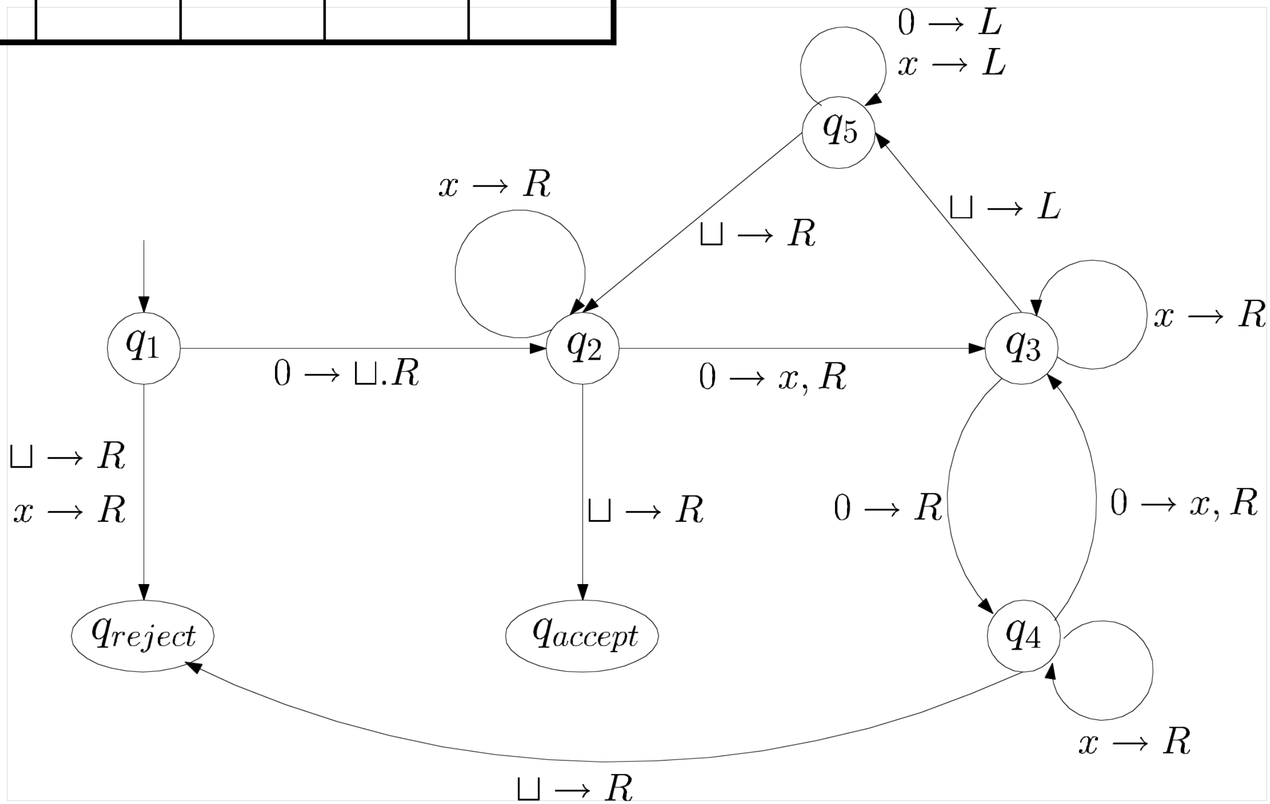


Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Abarbeitung eines Beispielworts

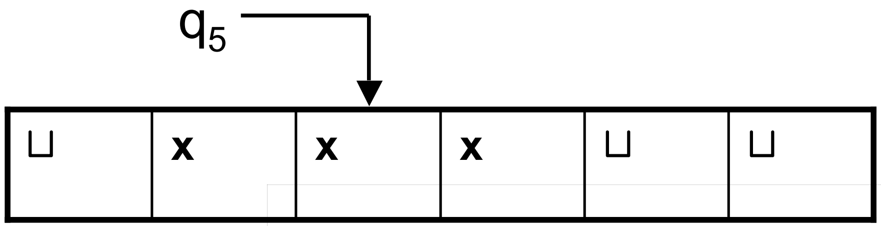


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

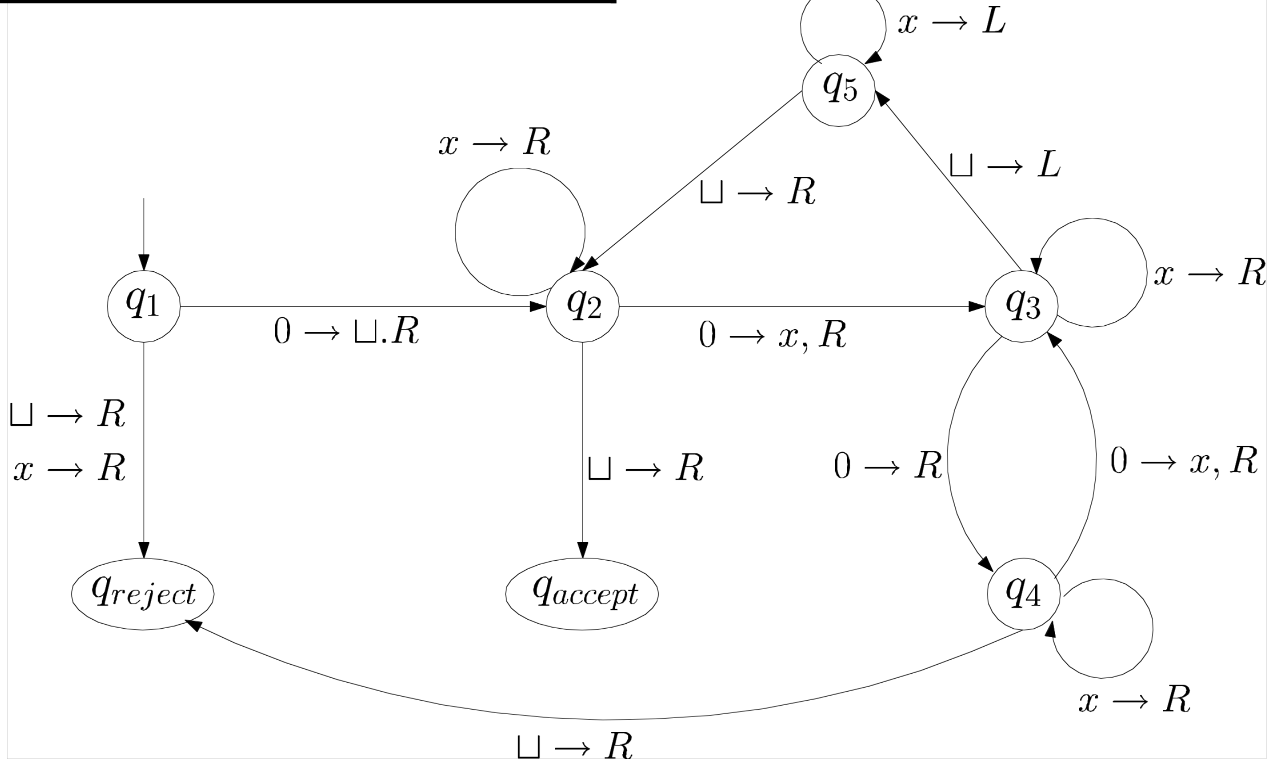


Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

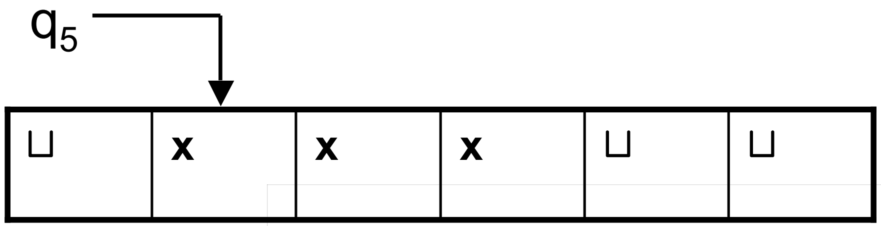
Abarbeitung eines Beispielworts



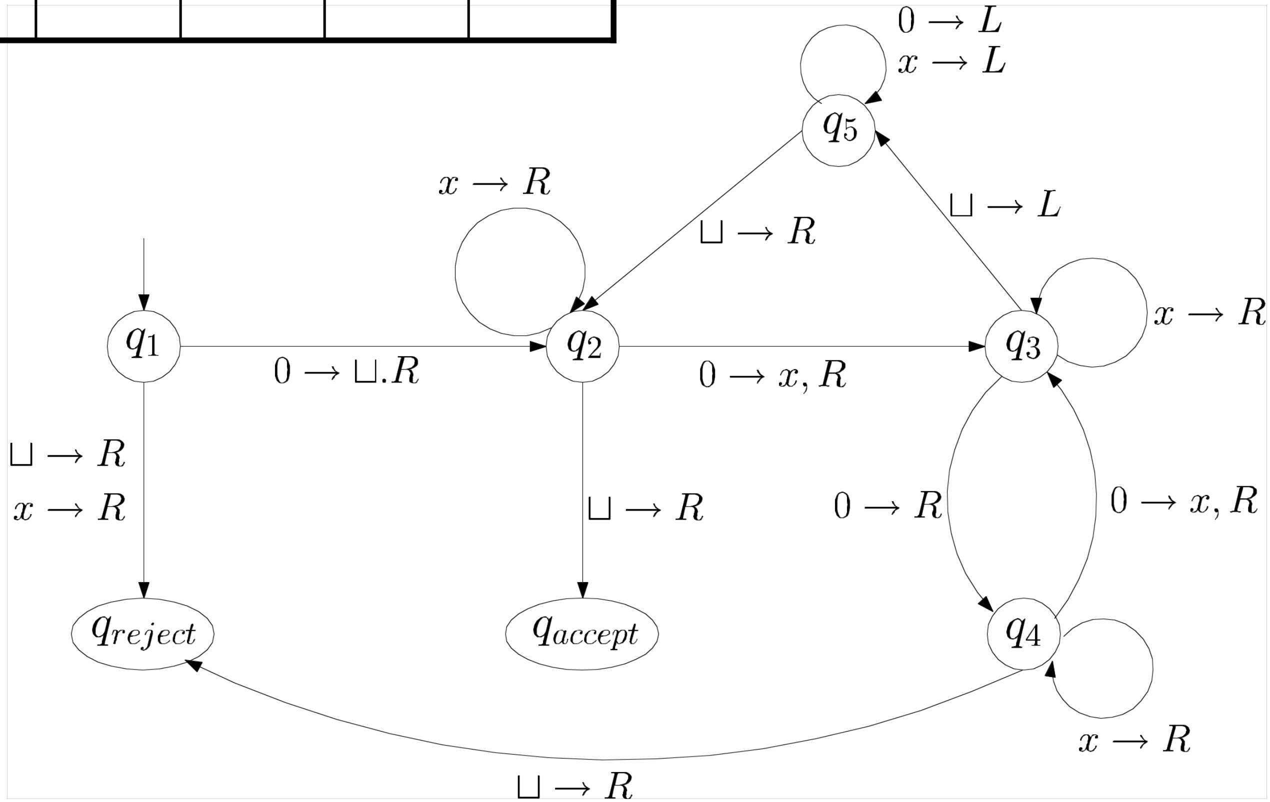
- Beispiel für das
- Wort: 0000



Abarbeitung eines Beispielworts

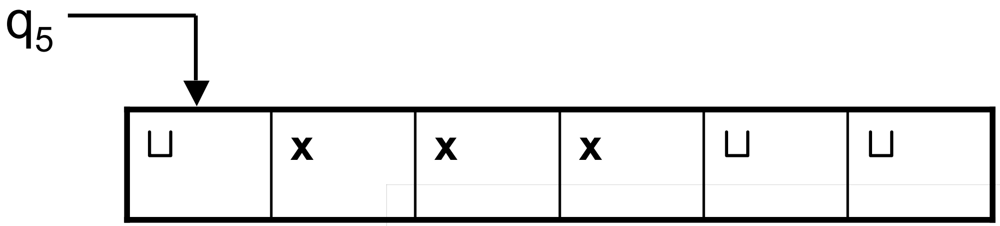


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

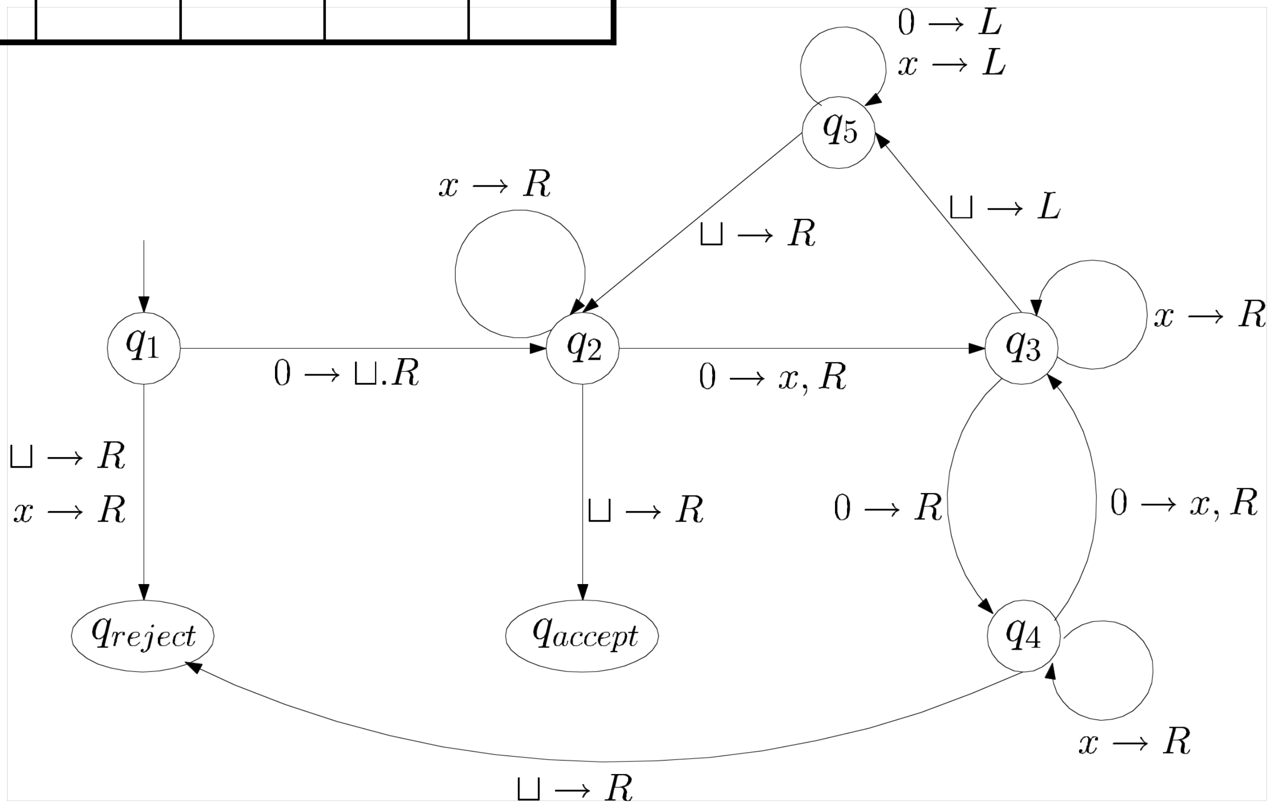


Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

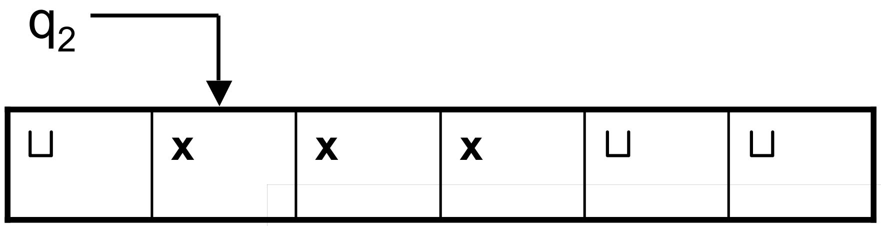


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

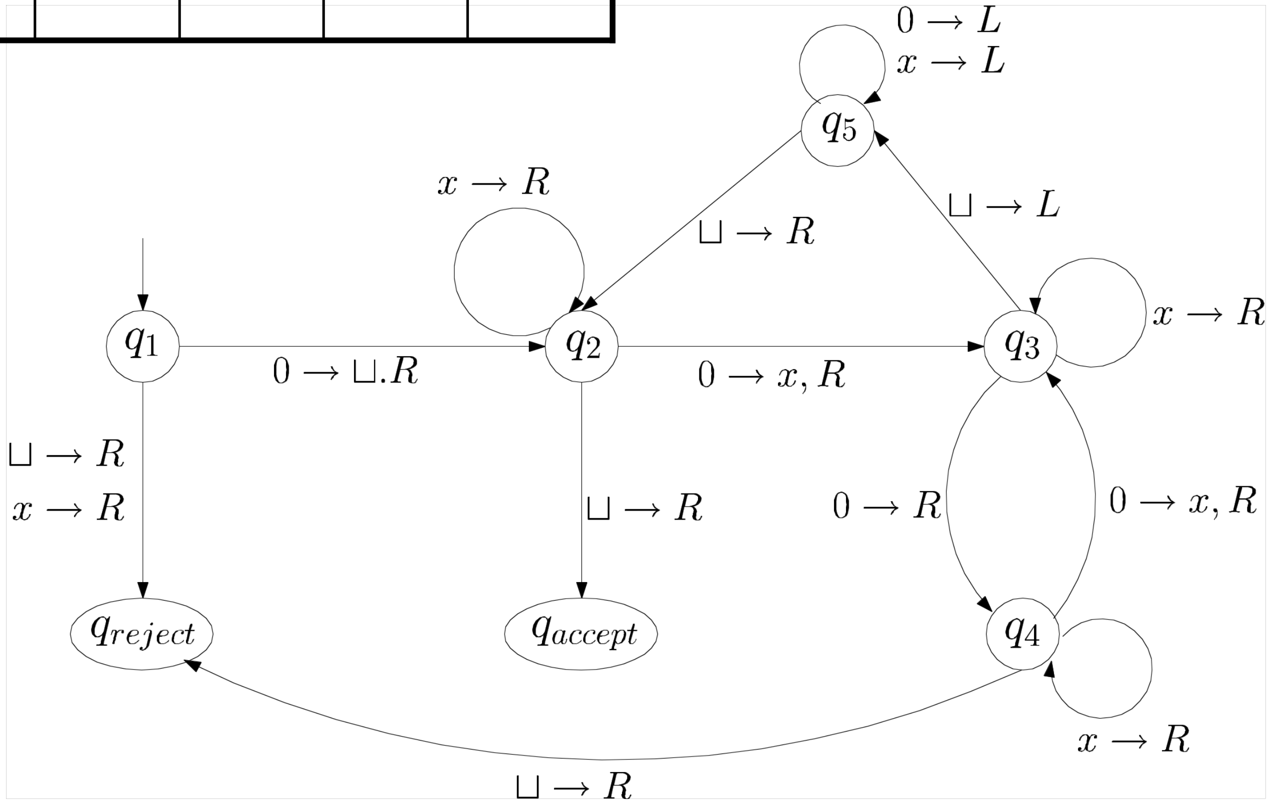


Abarbeitung eines Beispielworts

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

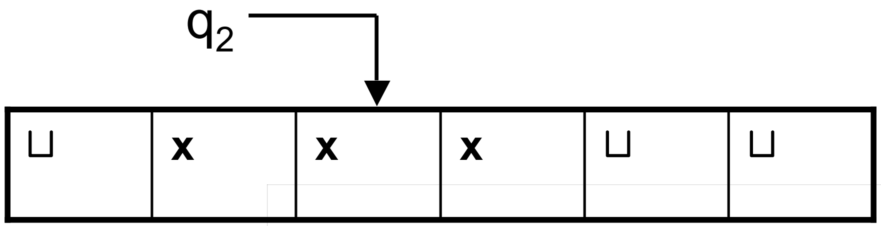


- ➢**Beispiel für das**
- ➢**Wort: 0000**

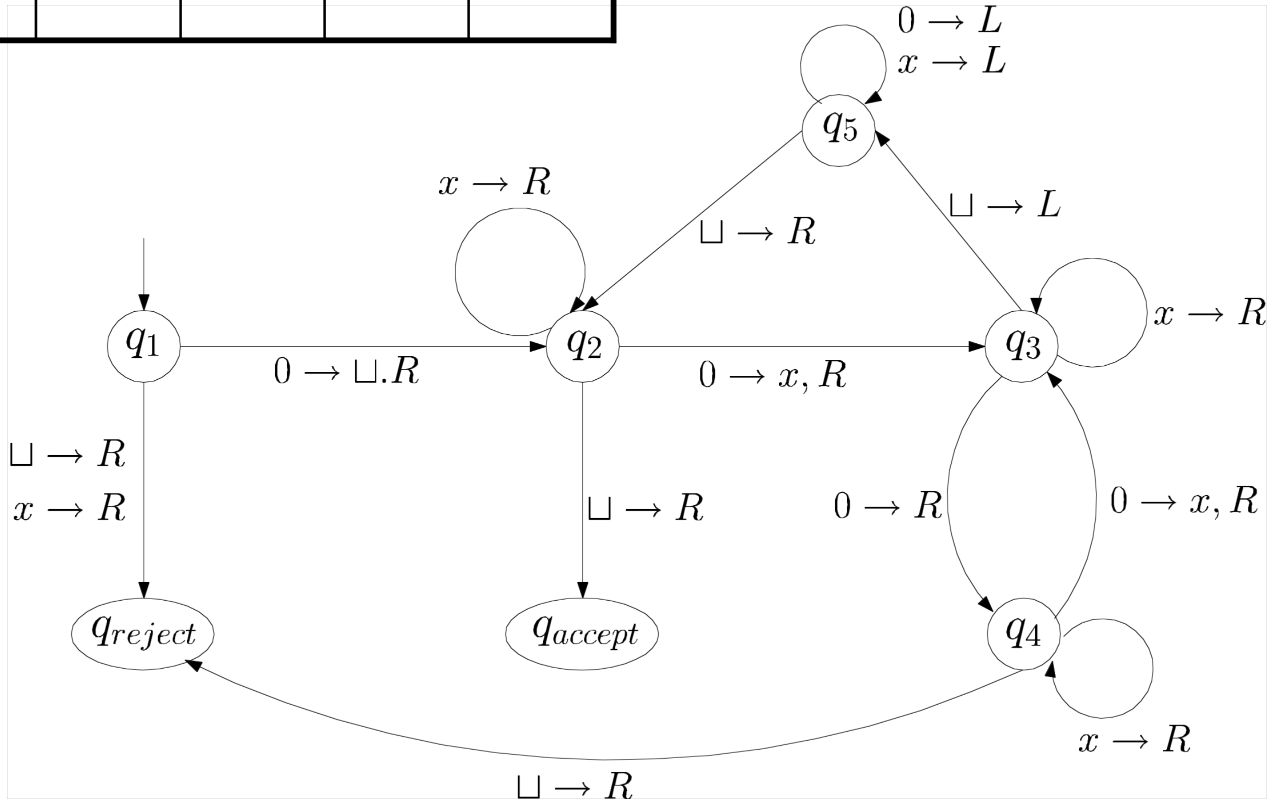


Abarbeitung eines Beispielworts

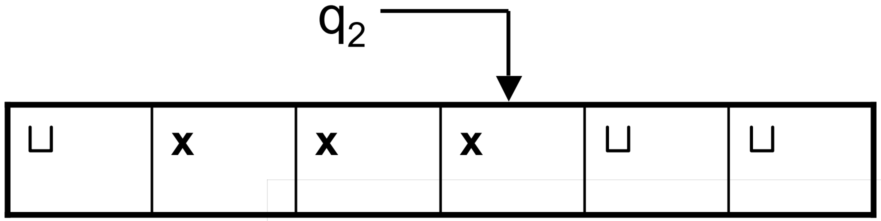
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer



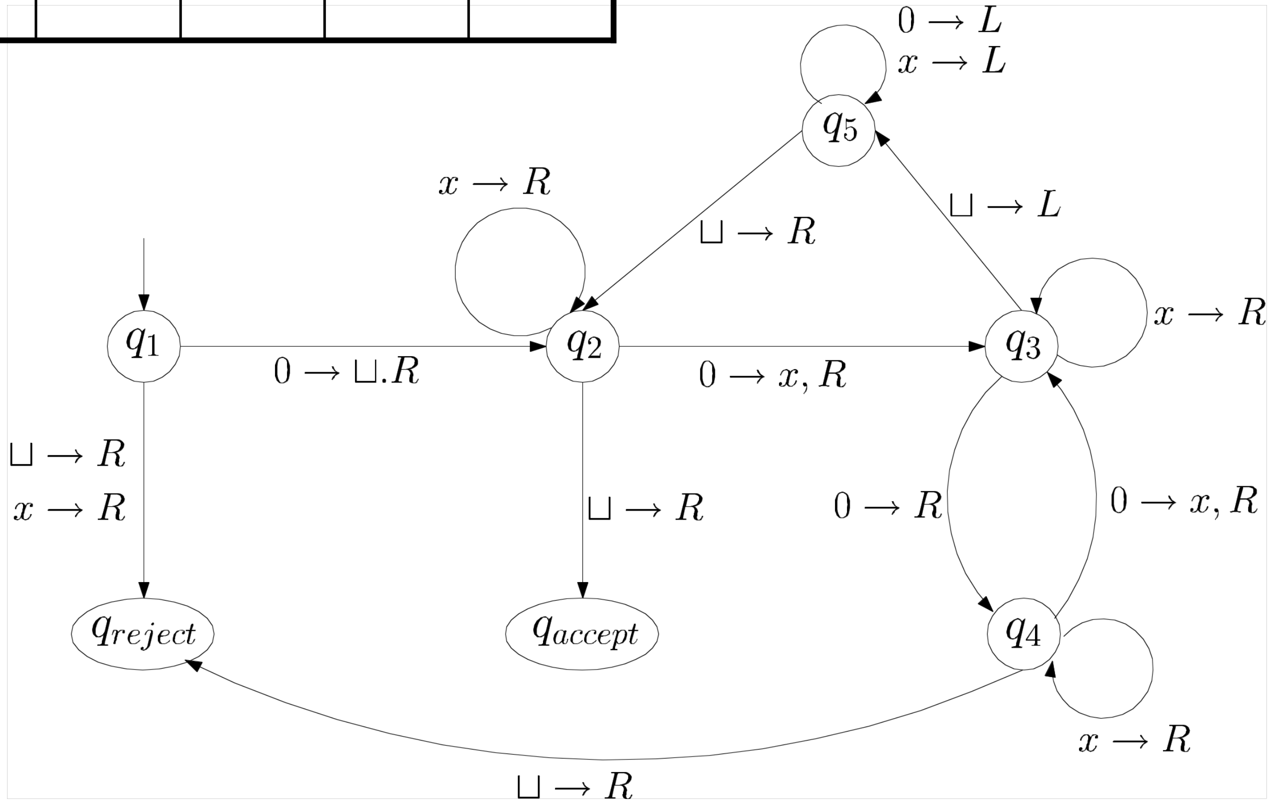
- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**



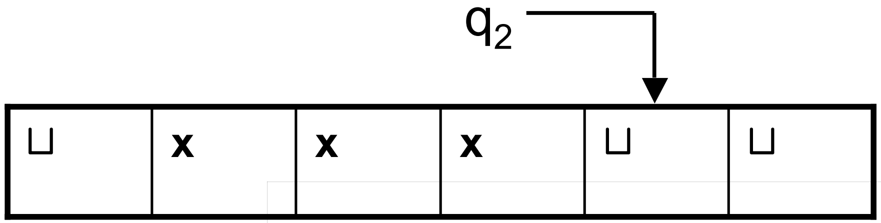
Abarbeitung eines Beispielworts



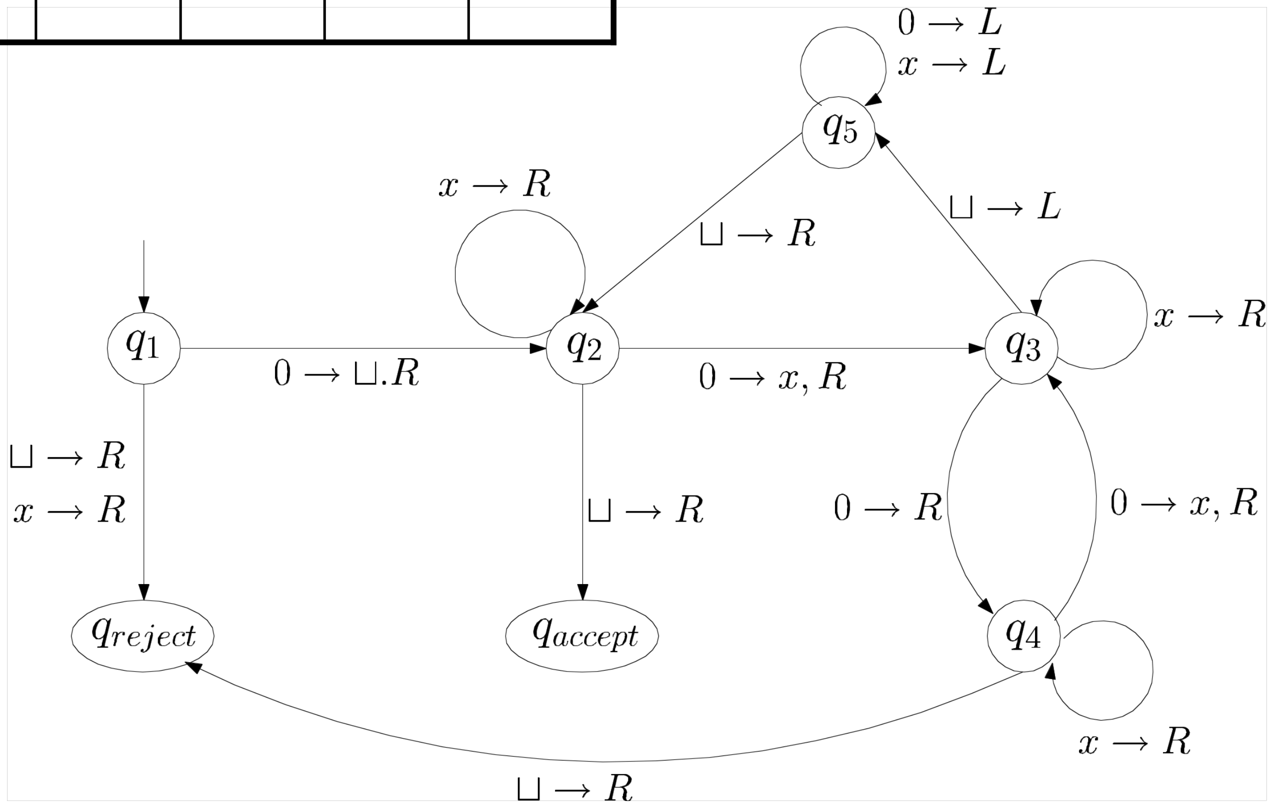
- Beispiel für das
- Wort: 0000



Abarbeitung eines Beispielworts

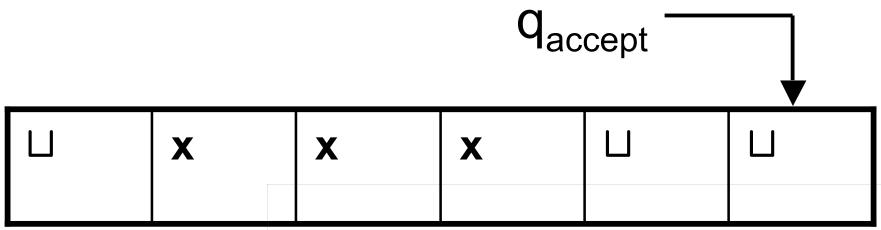


- **Beispiel für das**
- **Wort: 0000**

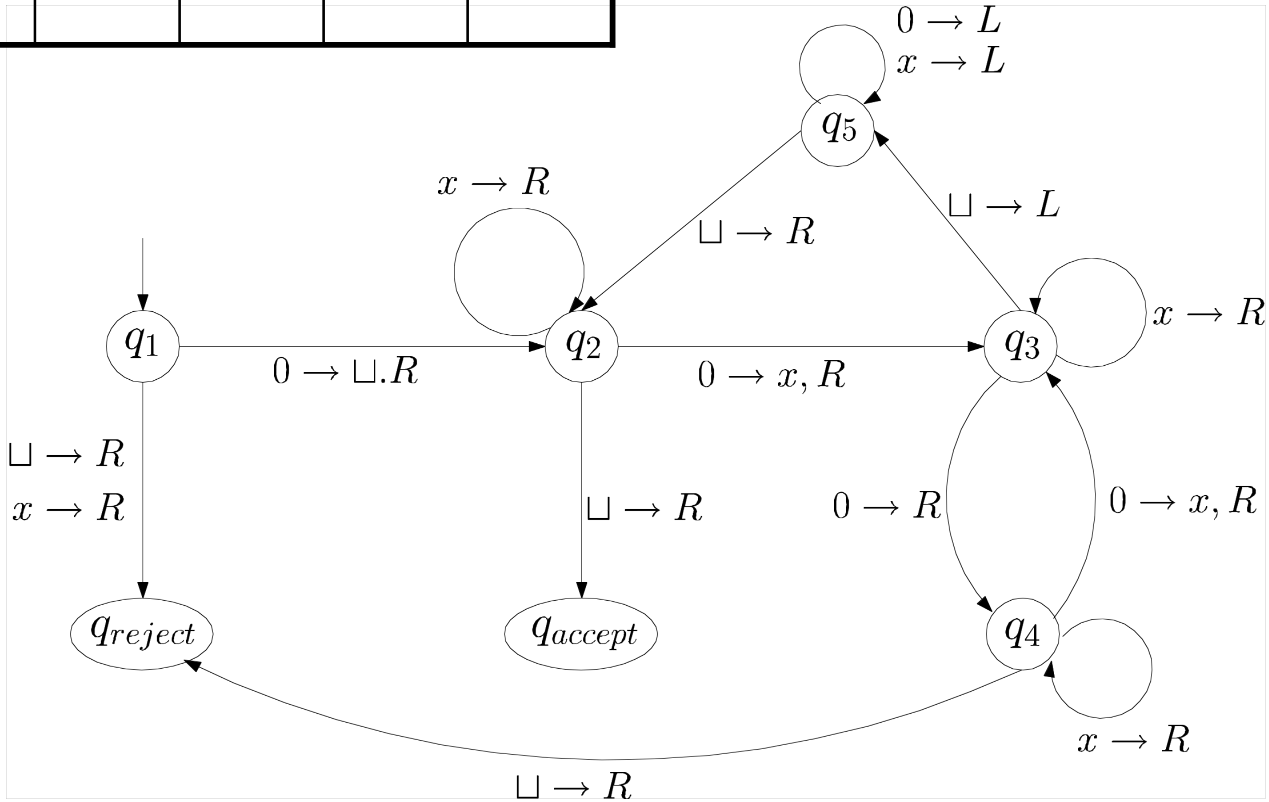


Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Abarbeitung eines Beispielworts



- Beispiel für das
- Wort: 0000



- Endkonfiguration:
- ⊔xxx⊔q_{accept}

Mehrband Turingmaschinen

- **Eine *Mehrband* oder *k-Band Turingmaschine* (k-Band DTM) hat *k* Bänder mit je einem Kopf.**

- **Die Übergangsfunktion ist dann von der Form**
  - $\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$

- **Die Arbeitsweise ist analog zu 1-Band-DTMs definiert.**
  - Zu Beginn steht die Eingabe auf Band 1,
  - sonst stehen überall Blanks.

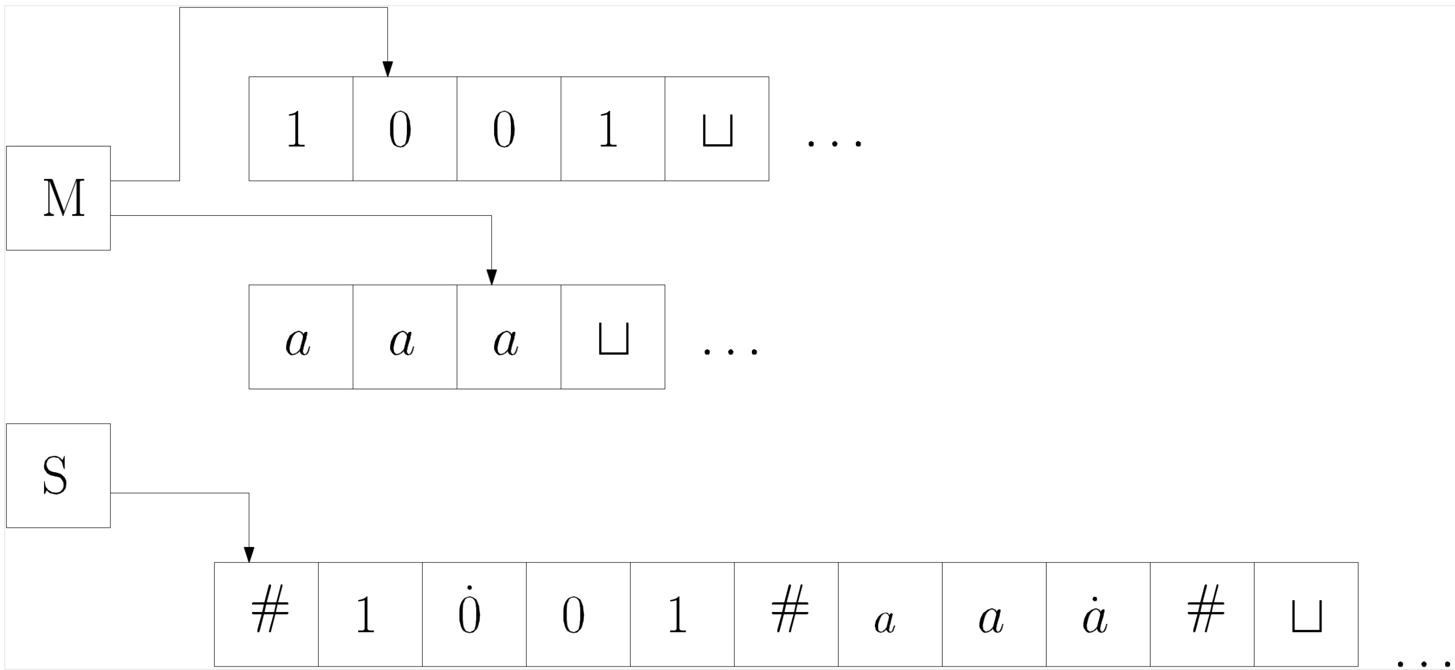
Äquivalenz von 1-Band und Mehrband Turingmaschinen

- **Satz:**
  - Zu jeder Mehrband Turingmaschine gibt es eine äquivalente 1-Band Turingmaschine

- **Beweis:**
  - Idee: Simuliere Mehrband DTM M auf 1-Band DTM S

Beweis Fortsetzung

- **Schreibe k Bänder hintereinander auf ein Band**
- **Sei # $\notin \Gamma$ zusätzliches Symbol**
  - –Verwende # um Bänder zu trennen
- **Für $x \in \Gamma$ füge $\dot{x} \notin \Gamma$ zum Alphabet hinzu**
- **Der Punkt repräsentiert die aktuelle Position des Kopfes auf dem Band**



Beweis Fortsetzung

- **Bei Eingabe w = w_1, … , w_n:**
  1. S bildet Startkonfiguration von M ab:

     $$\#\dot{w}_1 w_2 \ldots w_n \# \dot{\sqcup} \# \dot{\sqcup} \# \ldots \#$$

  2. Simulation eines Schrittes:
     - Gehe von links nach rechts über das Band und suche die Markierungen # und finde die Zeichen unter den virtuellen Köpfen
     - Gehe von links nach rechts über das Band und führe die Änderungen entsprechend der Übergangsfunktion von M durch
  3. Falls ein virtueller Kopf rechts auf ein # bewegt wird, schreibe ein $\sqcup$ und bewege alle folgenden Zeichen eine Position nach rechts

Äquivalenz von 1-Band und Mehrband Turingmaschinen

- **Korollar:**
  - Eine Sprache L ist genau dann **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine **Mehrband-Turingmaschine** gibt, die L akzeptiert

Ende der 9. Vorlesung

Dank an Michael Kortenjan für die Folienvorlage

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Informatik III
Christian Schindelhauer
schindel@informatik.uni-freiburg.de