ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Fourier-Analyse und Modulation

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe Freiburg

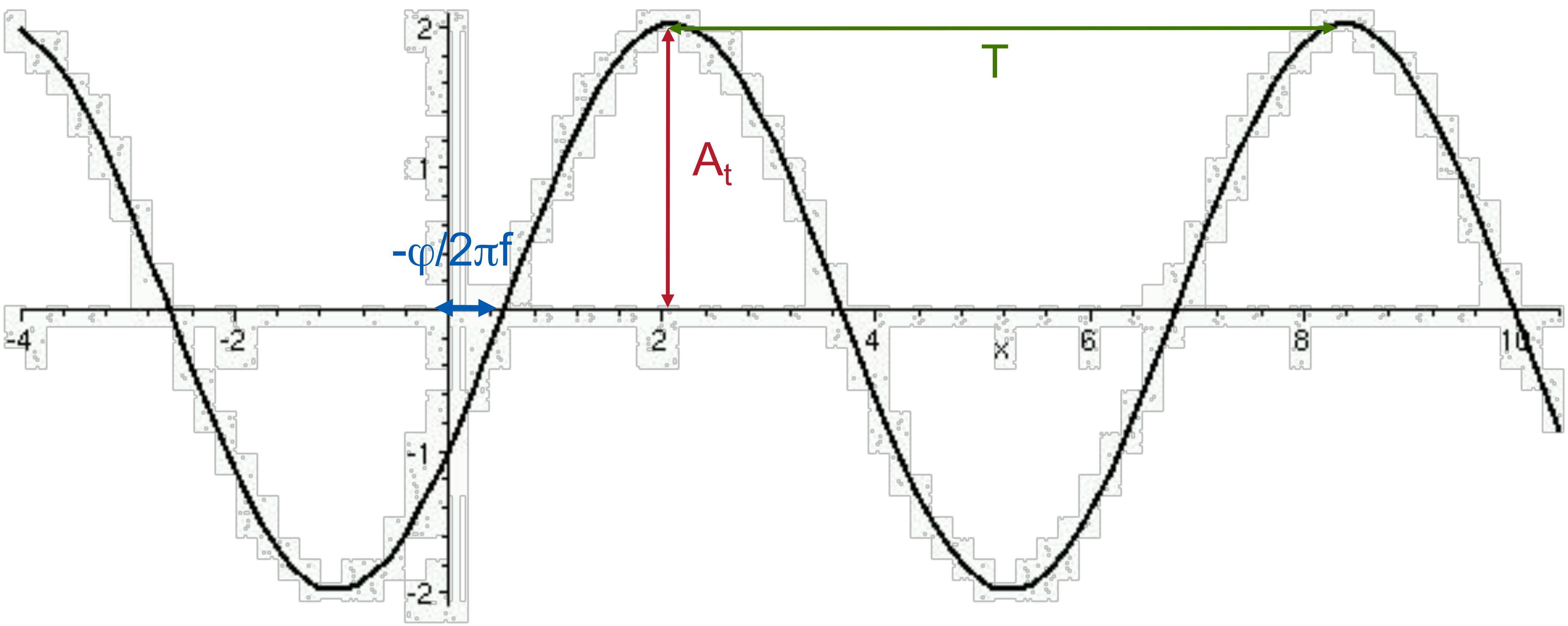
IIF INSTITUT FÜR INFORMATIK FREIBURG

Amplitudendarstellung

- **Amplitudendarstellung einer Sinusschwingung**

$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

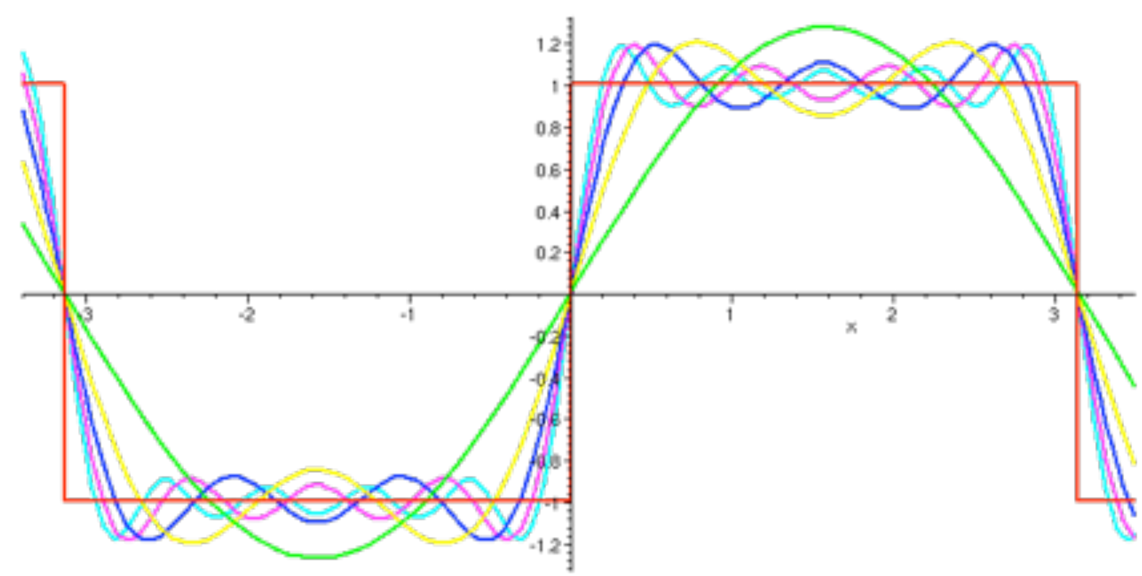
  - A: Amplitude
  - ϕ: Phasenverschiebung
  - f : Frequenz = 1/T
  - T: Periode



Fouriertransformation

- **Fouriertransformation einer periodischen Funktion:**
  - Zerlegung in verschiedene
  - Sinus/Cosinus-Funktionen
- **Dirichletsche Bedingungen einer periodischen Funktion f:**
  - $f(x) = f(x+2\pi)$
  - $f(x)$ is in $(-\pi,\pi)$ in endlich vielen Intervallen stetig und monoton
  - Falls f nicht stetig in x_0, dann ist $f(x_0)=(f(x_0-0)+f(x_0+0))/2$
- **Satz von Dirichlet:**
  - $f(x)$ genüge in $(-\pi,\pi)$ den Dirichletschen Bedingungen. Dann existieren Fourierkoeffizienten $a_0,a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ so dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x)\,.$$



Berechnung der Fourierkoeffizienten

- **Die Fourierkoeffizienten a_i, b_i können wie folgt berechnet werden:**
  - Für k = 0,1,2,…

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

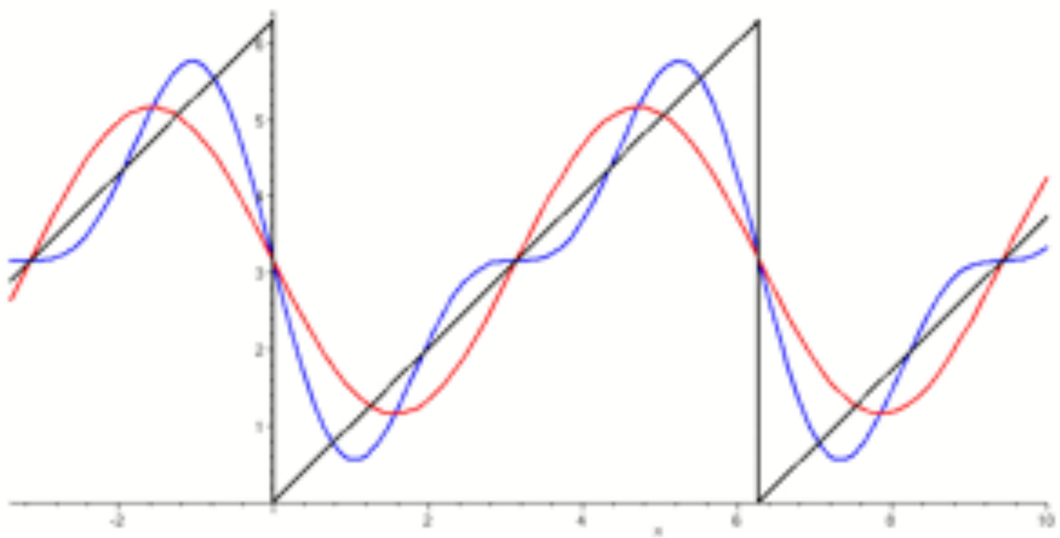
  - Für k = 1,2,3,…

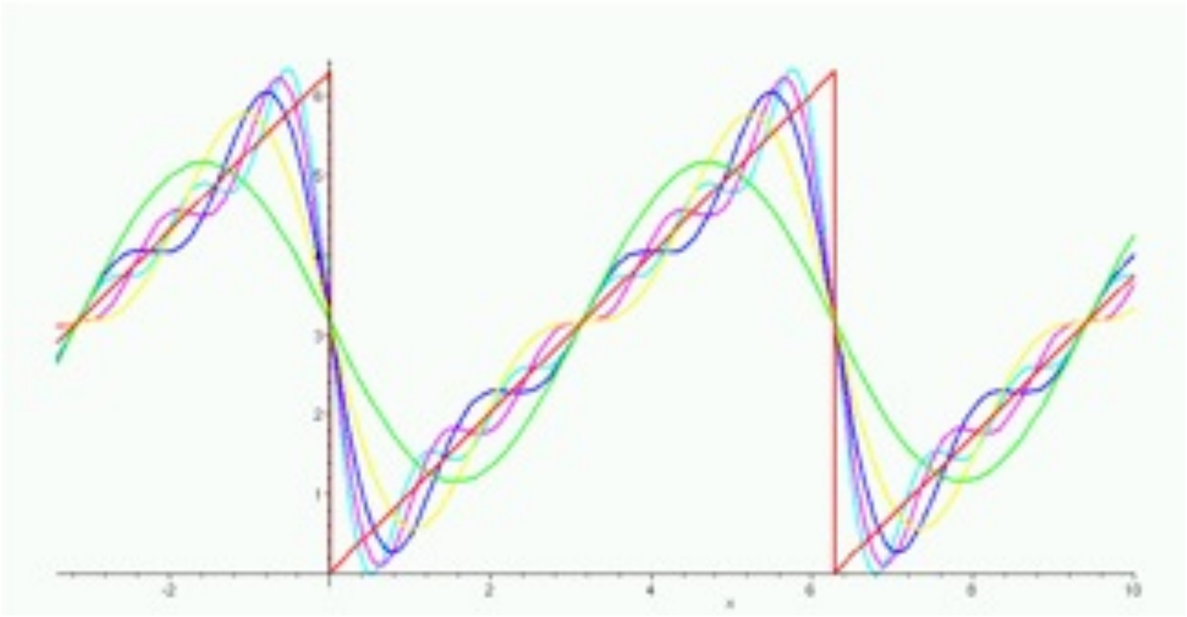
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

- **Beispiel: Sägezahnkurve**

$f(x) = x$, für $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$





Fourier-Analyse für allgemeine Periode

- **Der Satz von Fourier für Periode T=1/f:**
  - Die Koeffizienten c, a_n, b_n ergeben sich dann wie folgt

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(2\pi n f t) dt$$

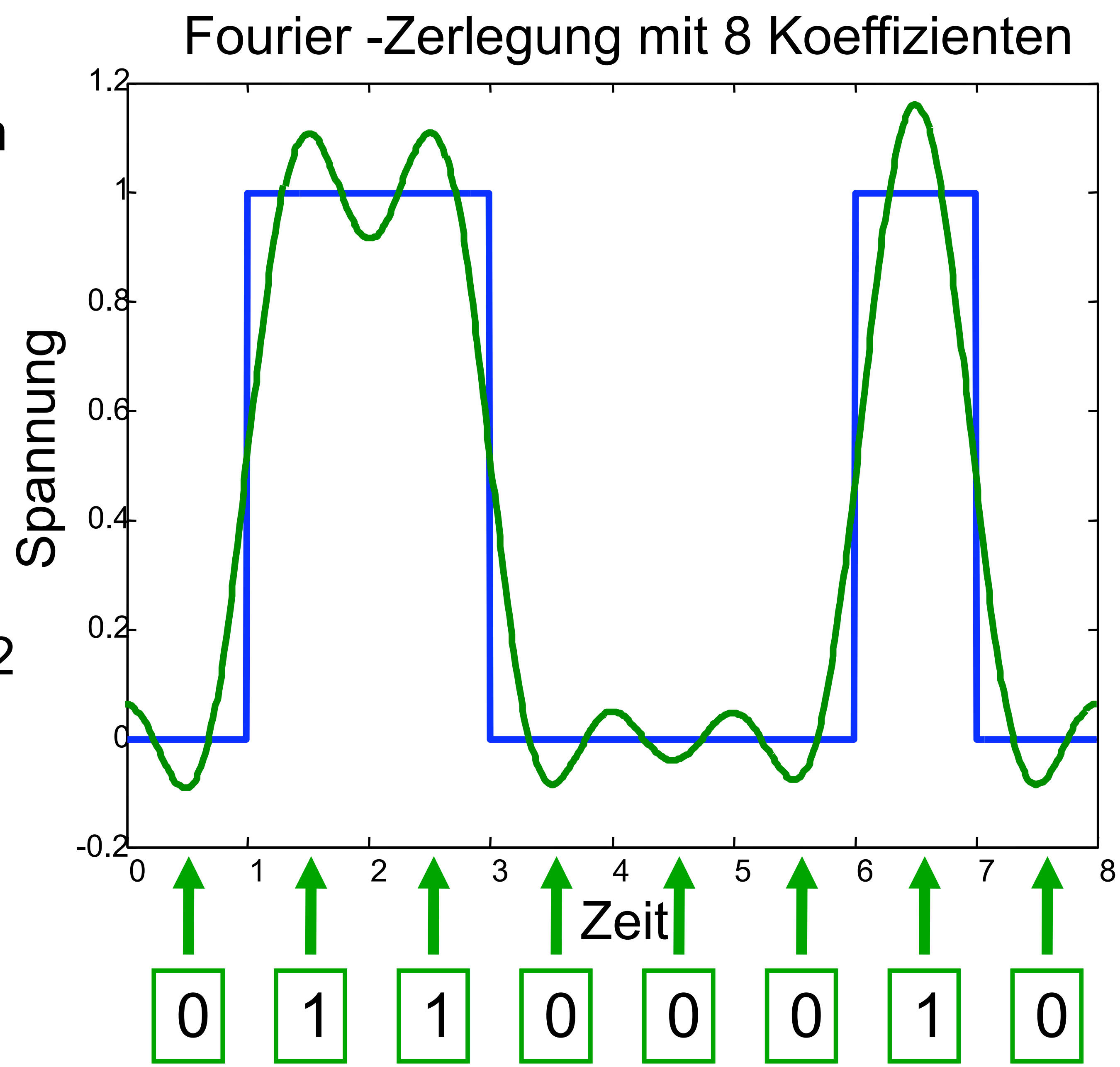
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(2\pi n f t) dt$$

- **Die Quadratsumme der k-ten Terme ist proportional zu der Energie, die in dieser Frequenz verbraucht wird:**

$$(a_k)^2 + (b_k)^2$$

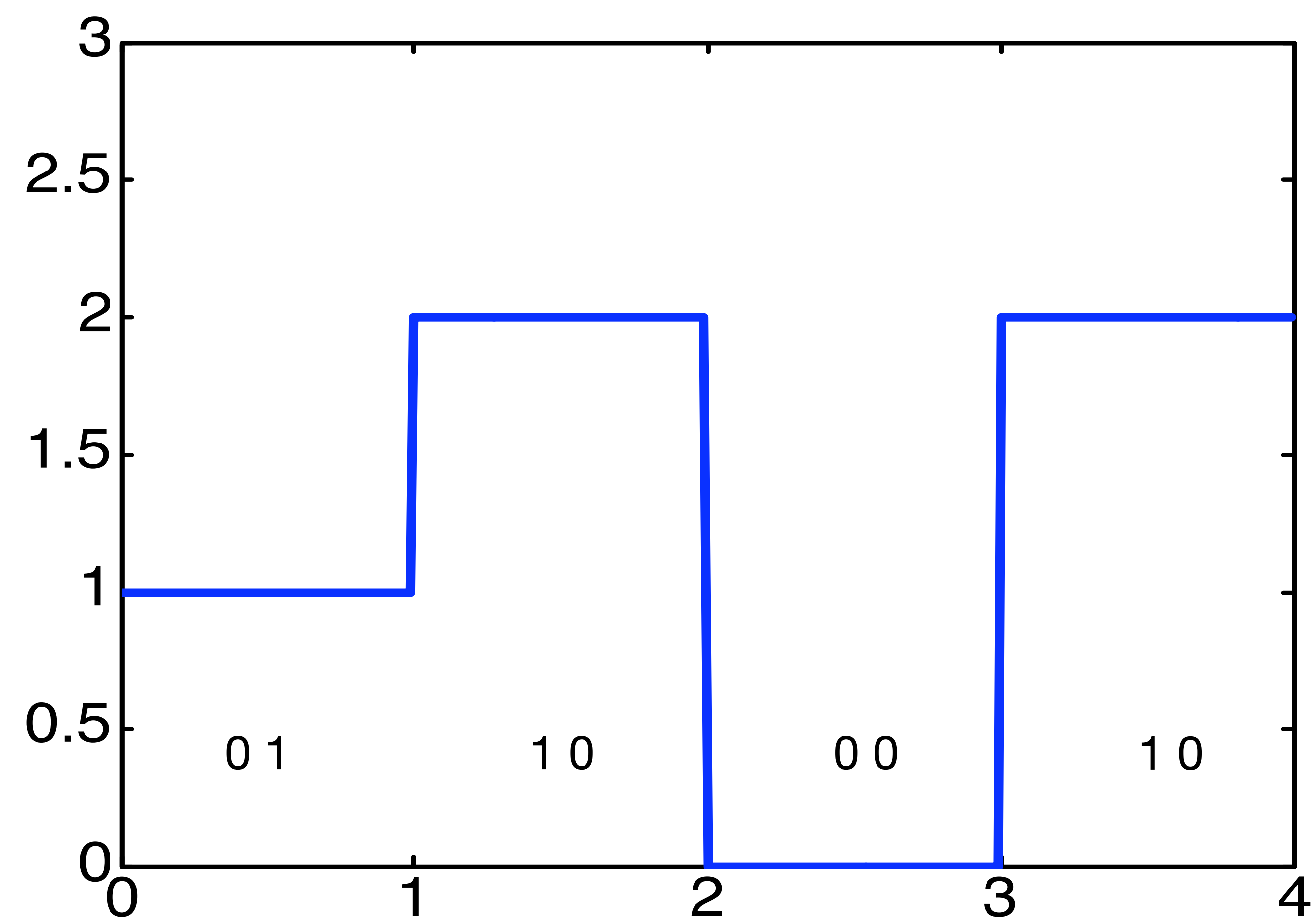
Wie oft muss man messen?

- Wie viele Messwerte sind notwendig, um eine Fouriertransformation bis zur k.-ten Komponenten genau zu bestimmen?
- **Nyquist-Shannon-Abtasttheorem**
  - Um ein kontinuierliches bandbegrenztes Signal mit einer Maximalfrequenz f_{max} zu rekonstruieren, braucht man mindestens eine Abtastfrequenz von 2 f_{max}.



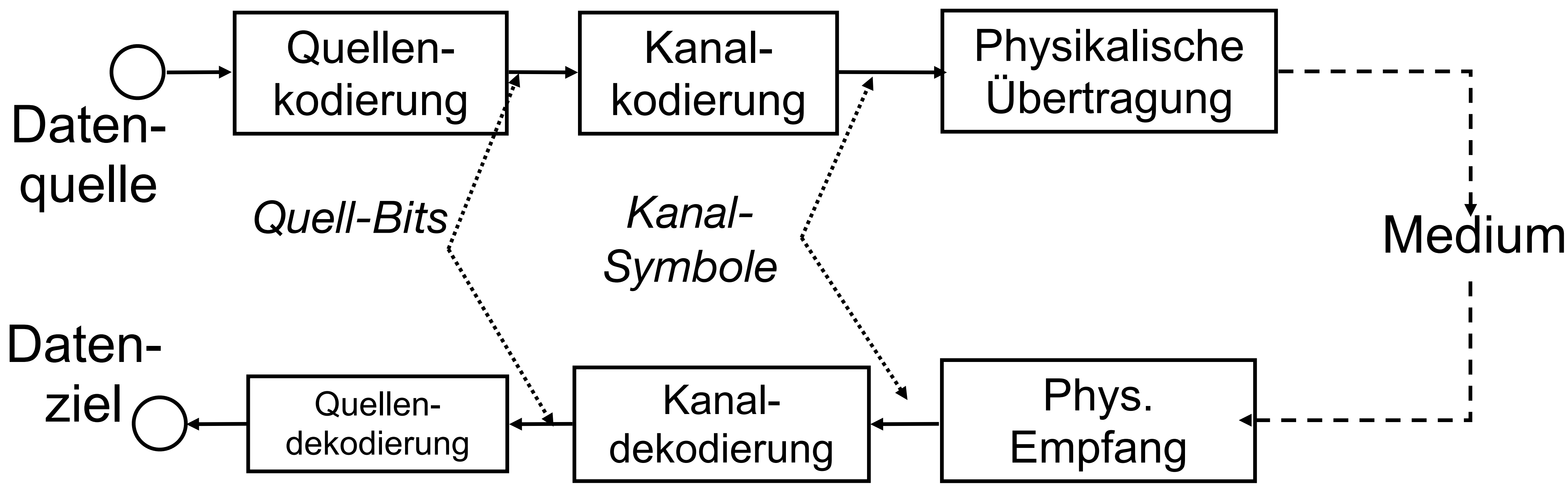
Symbole und Bits

- **Für die Datenübertragung können statt Bits auch Symbole verwendet werden**
- **Z.B. 4 Symbole: A,B,C,D mit**
  - A=00, B=01, C=10, D=11
- **Symbole**
  - Gemessen in Baud
  - Anzahl der Symbole pro Sekunde
- **Datenrate**
  - Gemessen in Bits pro Sekunde (bit/s)
  - Anzahl der Bits pro Sekunde
- **Beispiel**
  - 2400 bit/s Modem hat 600 Baud (verwendet 16 Symbole)



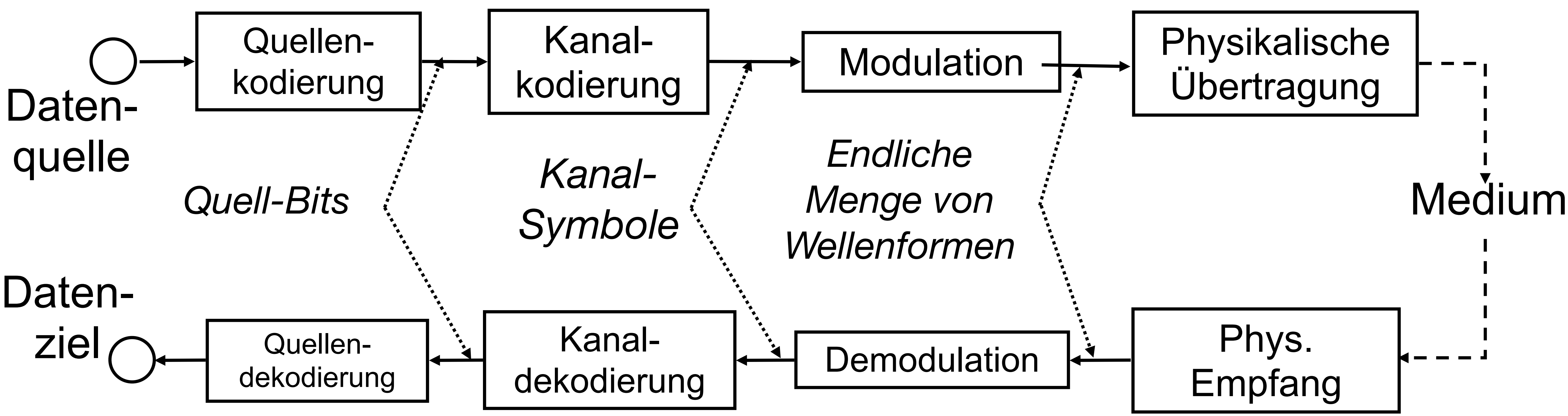
Struktur einer digitalen Basisband-Übertragung

- **Quellkodierung**
  - Entfernen redundanter oder irrelevanter Information
  - Z.B. mit verlustbehafteter Komprimierung (MP3, MPEG 4)
  - oder mit verlustloser Komprimierung (Huffman-Code)
- **Kanalkodierung**
  - Abbildung der Quellbits auf Kanal-Symbole
  - Möglicherweise Hinzufügen von Redundanz angepasst auf die Kanaleigenschaften
- **Physikalische Übertragung**
  - Umwandlung in physikalische Ereignisse



Struktur einer digitalen Breitband-Übertragung

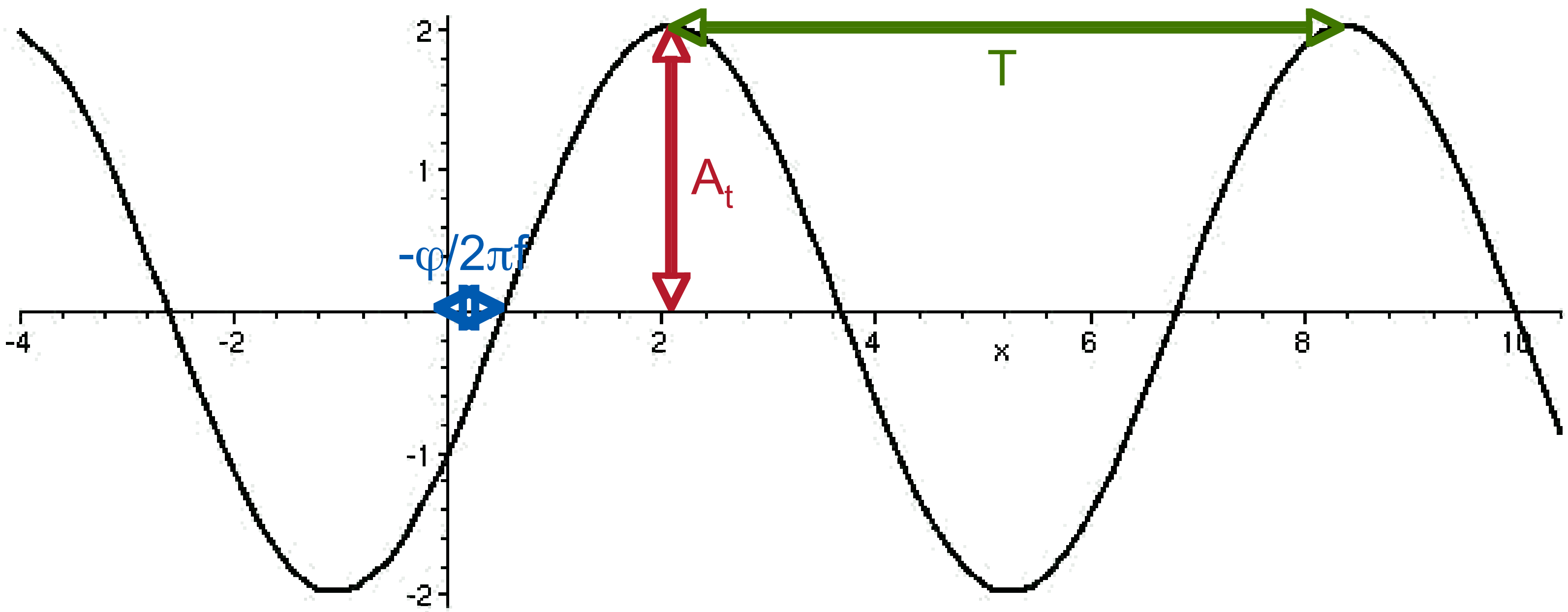
- **MOdulation/DEModulation**
  - Übersetzung der Kanalsymbole durch
    - Amplitudenmodulation
    - Phasenmodulation
    - Frequenzmodulation
    - oder einer Kombination davon



Breitband

- **Idee:**
  - Konzentration auf die idealen Frequenzen des Mediums
  - Benutzung einer Sinuskurve als Trägerwelle der Signale
- **Eine Sinuskurve hat keine Information**
- **Zur Datenübertragung muss die Sinuskurve fortdauernd verändert werden (moduliert)**
  - Dadurch Spektralweitung (mehr Frequenzen in der Fourier-Analyse)
- **Folgende Parameter können verändert werden:**
  - Amplitude A
  - Frequenz f=1/T
  - Phase φ

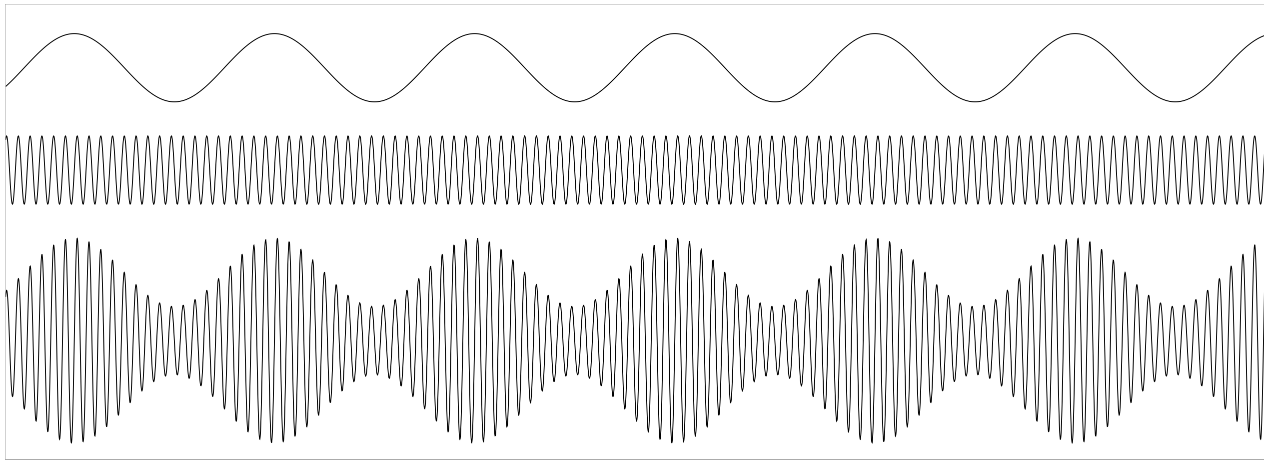
$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \phi)$$



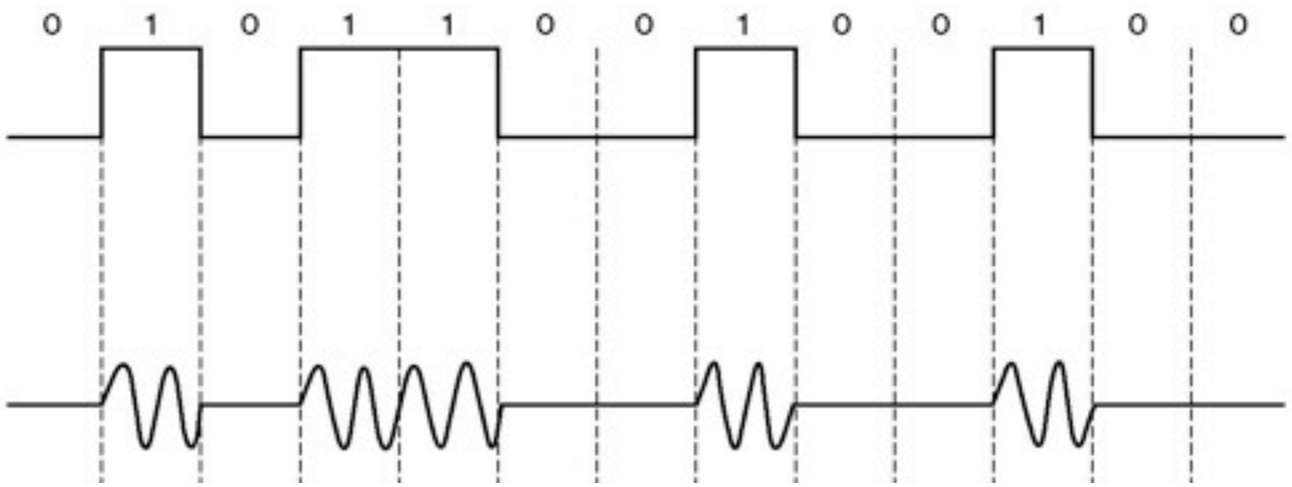
Amplitudenmodulation

- **Das zeitvariable Signal s(t) wird als Amplitude einer Sinuskurve kodiert:**

$$f_A(t) = s(t)\sin(2\pi f t + \phi)$$



- **Analoges Signal**
  - Amplitude Modulation
  - Kontinuierliche Funktion in der Zeit
    - z.B. zweites längeres Wellensignal (Schallwellen)
- **Digitales Signal**
  - Amplitude Keying
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Symbolstärken
  - Spezialfall: Symbole 0 oder 1
    - on/off keying



Amplitude Shift Keying (ASK)

- **Sei $E_i(t)$ die Symbol-Energie zum Zeitpunkt t**

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

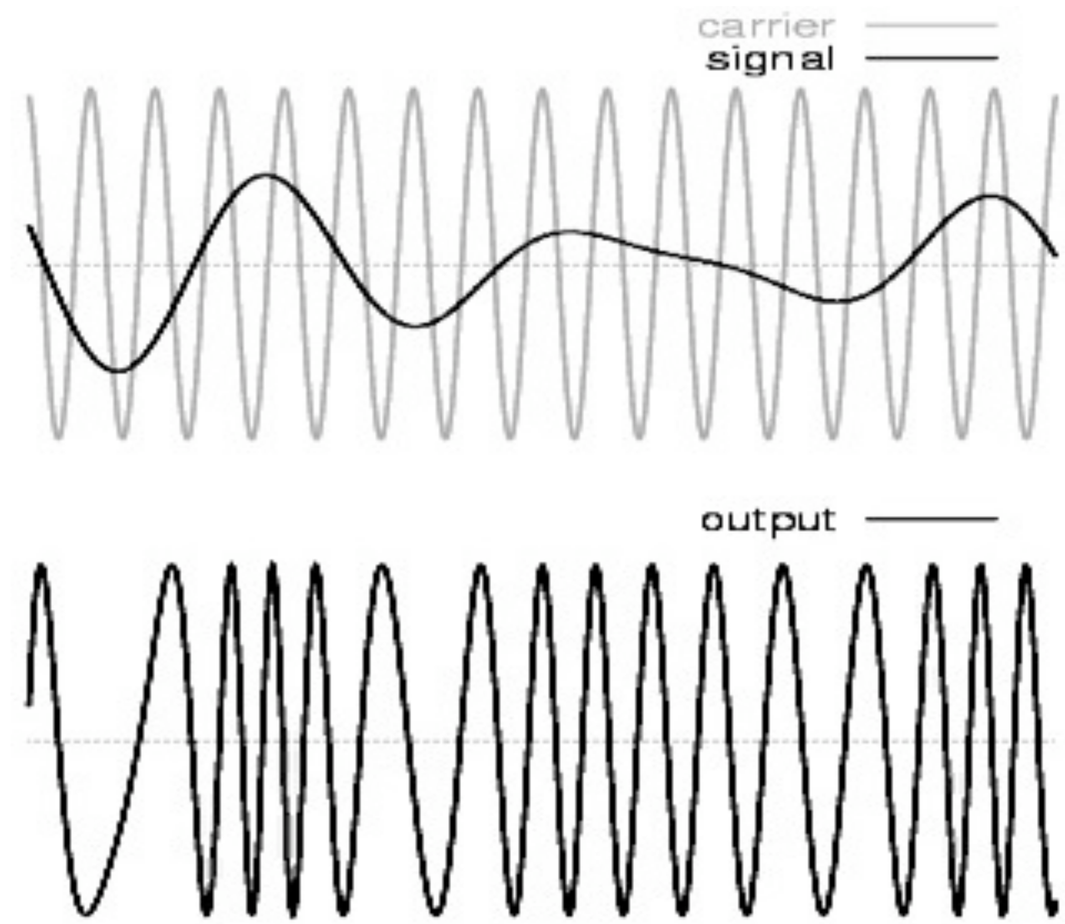
- **Beispiel: $E_0(t) = 1$, $E_1(t) = 2$**

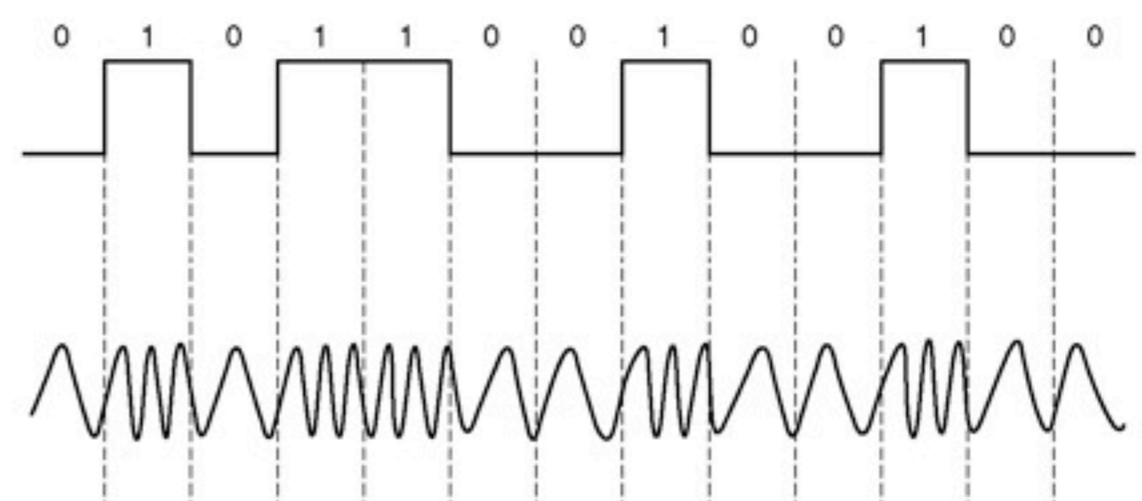
Frequenzmodulation

- **Das zeitvariable Signal s(t) wird in der Frequenz der Sinuskurve kodiert:**

$$f_F(t) = a \sin(2\pi s(t) t + \phi)$$

- **Analoges Signal**
  - Frequency Modulation (FM)
  - Kontinuierliche Funktion in der Zeit
- **Digitales Signal**
  - Frequency Shift Keying (FSK)
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Frequenzen



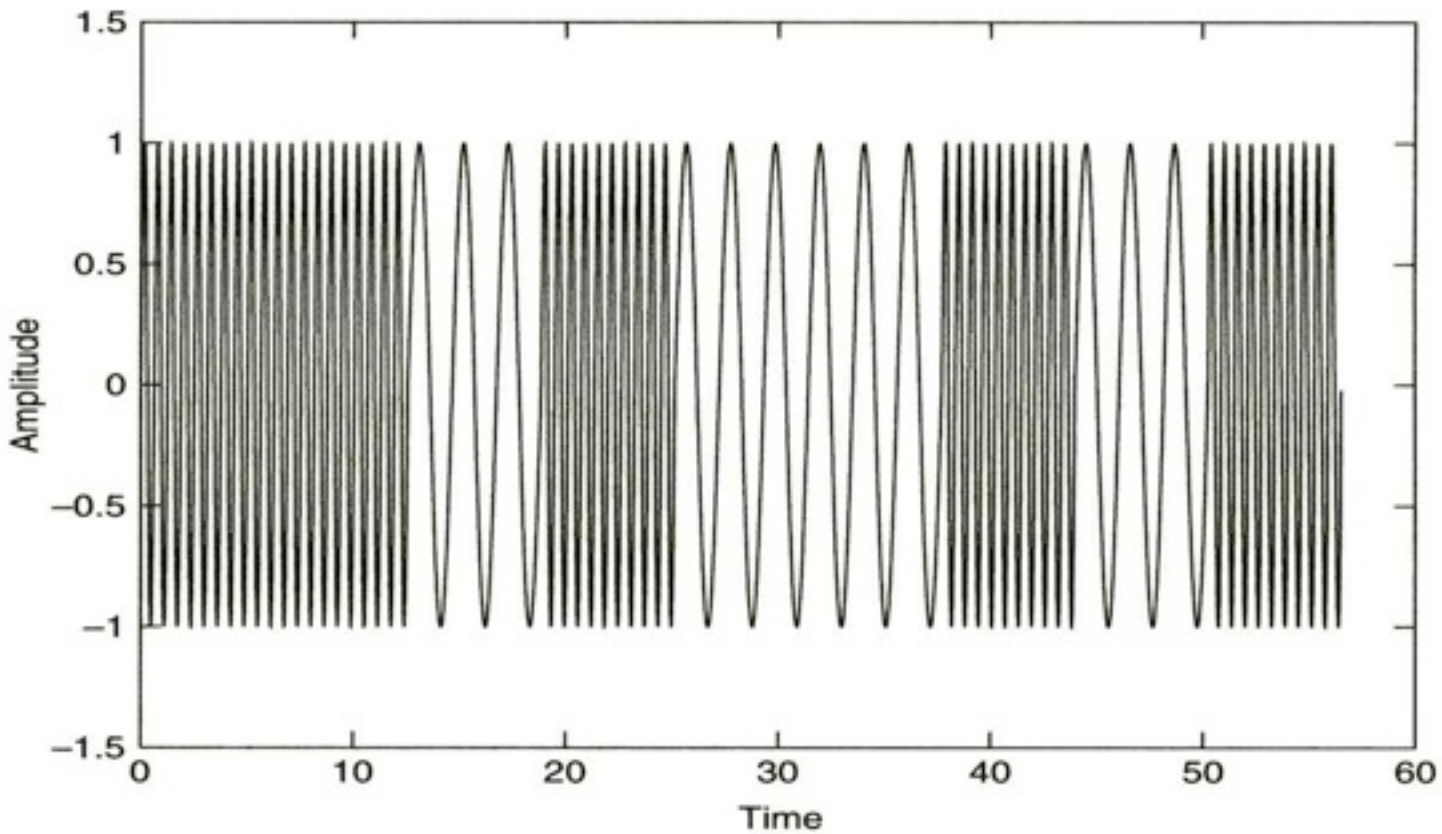


Frequency Shift Keying (FSK)

- **Frequenzsignale $\omega_i(t)$**

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot \sin(\omega_i(t) \cdot t + \phi)$$

- **Example:**

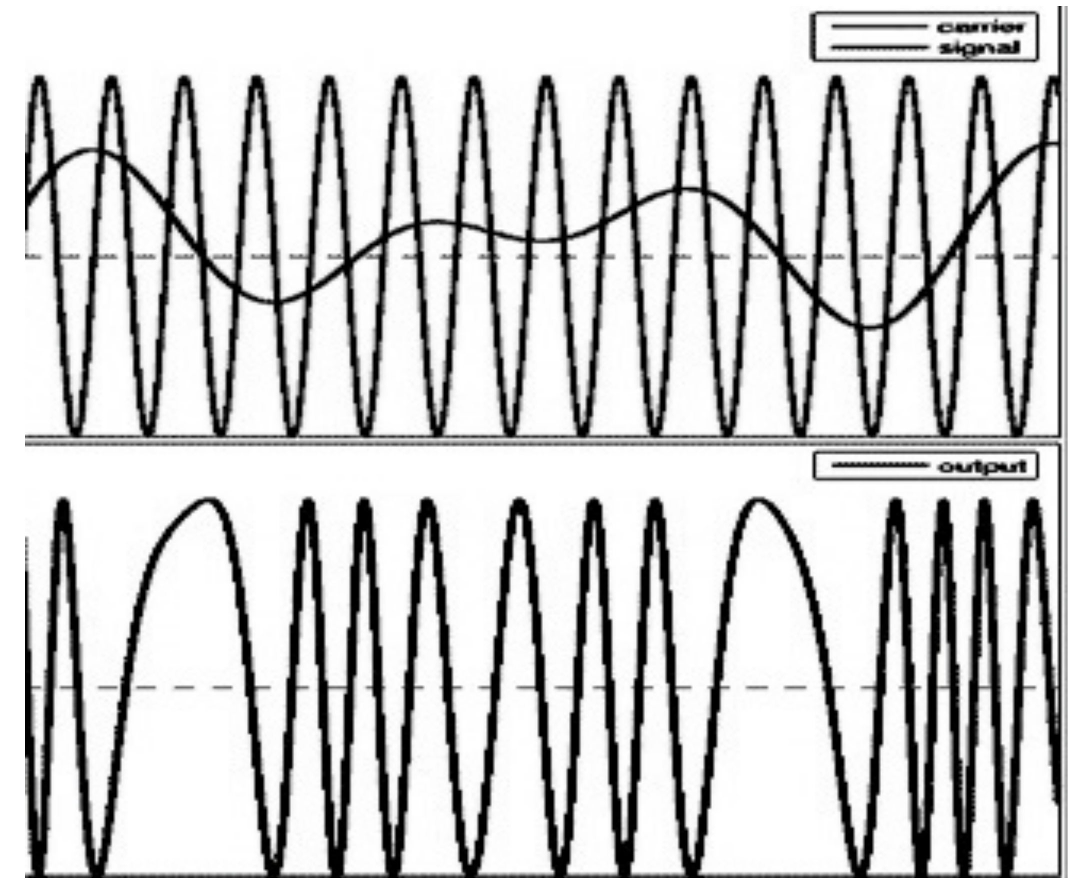


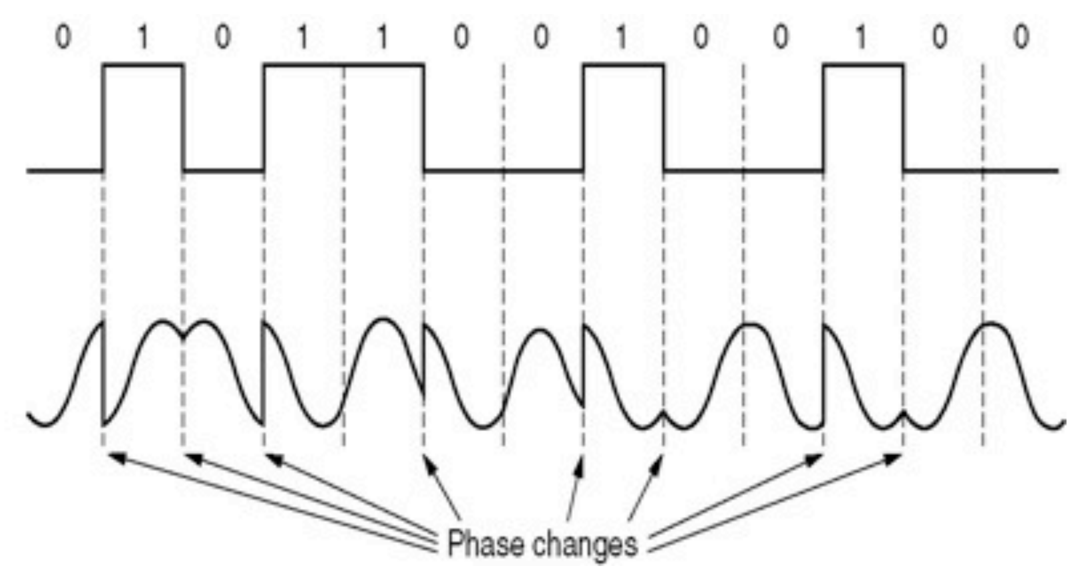
Phasenmodulation

- **Das zeitvariable Signal s(t) wird in der Phase der Sinuskurve kodiert:**

$$f_P(t) = a \sin(2\pi f t + s(t))$$

- **Analoges Signal**
  - **Phase Modulation (PM)**
  - Sehr ungünstige Eigenschaften
  - Wird nicht eingesetzt
- **Digitales Signal**
  - **Phase-Shift Keying (PSK)**
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Phasen





Digitale und analoge Signale im Vergleich

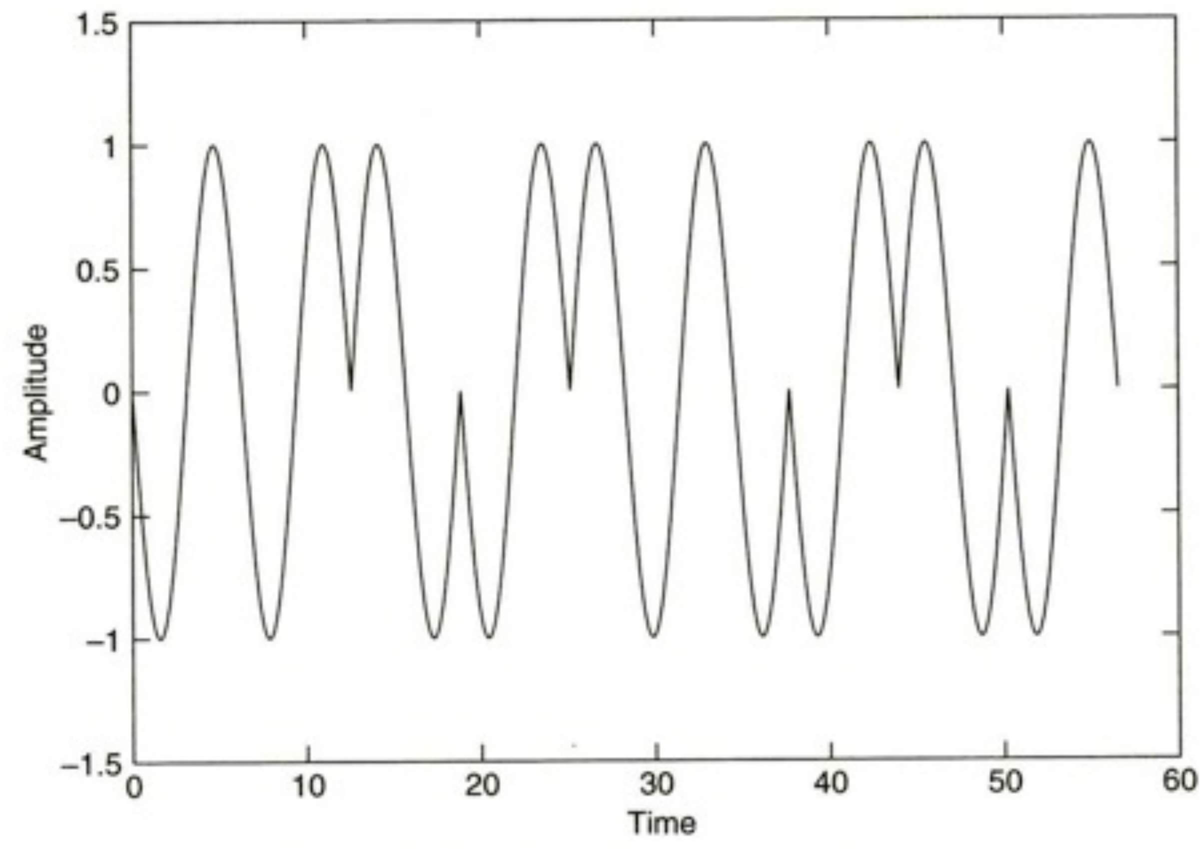
- **Für einen Sender gibt es zwei Optionen**
  - Digitale Übertragung
    - Endliche Menge von diskreten Signalen
    - Z.B. endliche Menge von Spannungsgrößen/ Stromstärken
  - Analoge Übertragung
    - Unendliche (kontinuierliche) Menge von Signalen
    - Z.B. Signal entspricht Strom oder Spannung im Draht
- **Vorteil der digitalen Signale:**
  - Es gibt die Möglichkeit Empfangsungenauigkeiten zu reparieren und das ursprüngliche Signal zu rekonstruieren
  - Auftretende Fehler in der analogen Übertragung können sich weiter verstärken

Phase Shift Keying (PSK)

- **For phase signals $\phi_i(t)$**

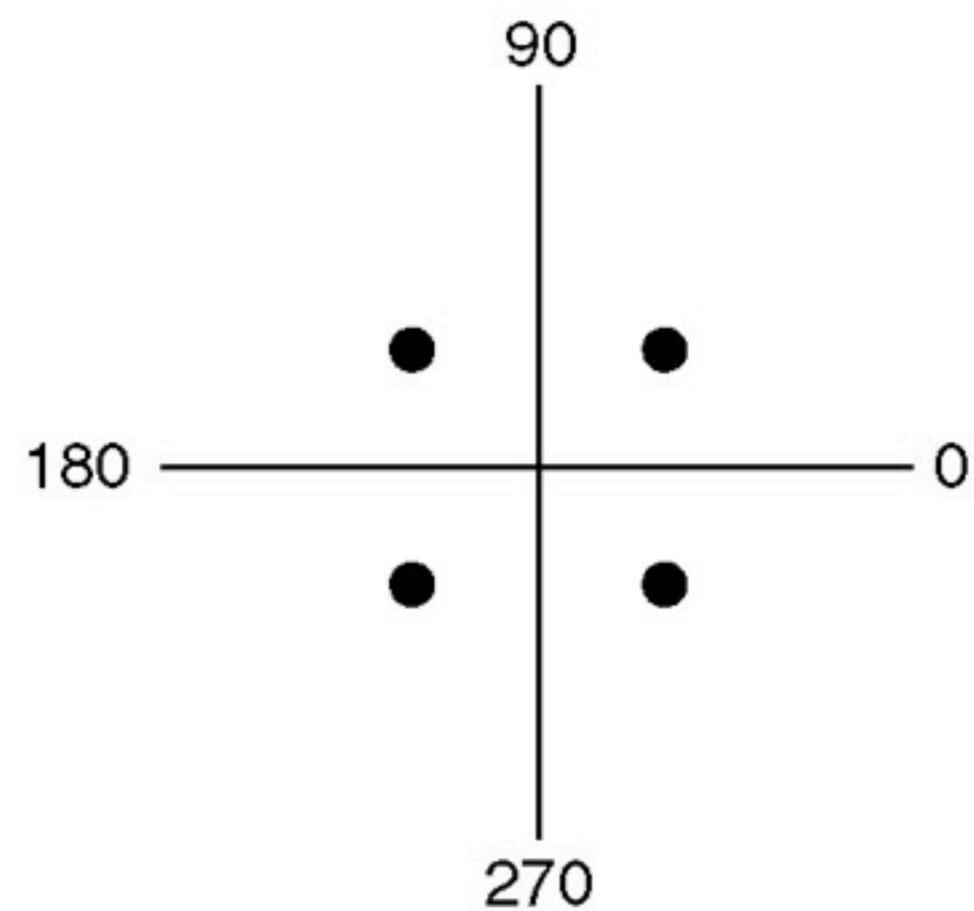
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_i(t))$$

- **Example:**



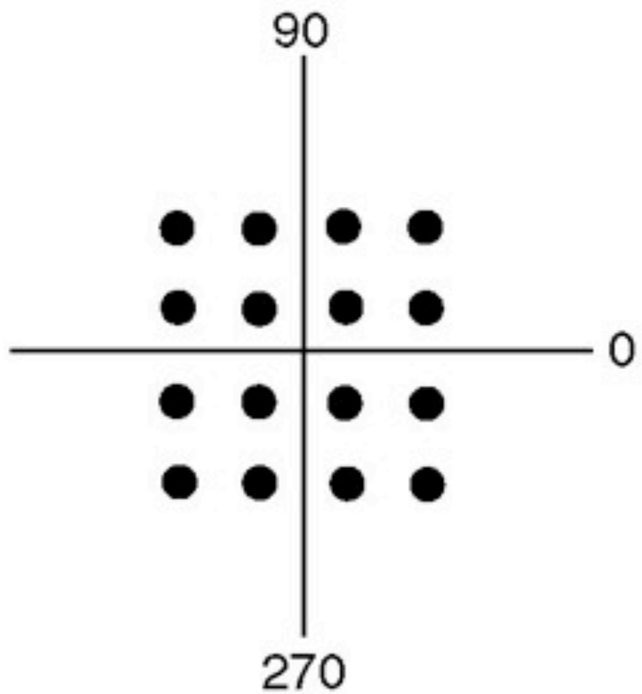
PSK mit verschiedenen Symbolen

- **Phasenverschiebungen können vom Empfänger sehr gut erkannt werden**
- **Kodierung verschiedener Symoble sehr einfach**
  - Man verwendet Phasenverschiebung z.B. π/4, 3/4π, 5/4π, 7/4π
    - selten: Phasenverschiebung 0 (wegen Synchronisation)
  - Bei vier Symbolen ist die Datenrate doppelt so groß wie die Symbolrate
- **Diese Methode heißt Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)**



Amplituden- und Phasenmodulation

- **Amplituden- und Phasenmodulation können erfolgreich kombiniert werden**
- **Beispiel: 16-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)**
  - Man verwendet 16 verschiedene Kombinationen von Phasen und Amplituden für jedes Symbol
  - Jedes Symbol kodiert vier Bits ($2^4 = 16$)
  - Die Datenrate ist also viermal so groß wie die Symbolrate



Nyquists Theorem

- **Definition**
  - Die Bandweite H ist die Maximalfrequenz in der Fourier-Zerlegung
- **Angenommen:**
  - Die maximale Frequenz des empfangenen Signals ist f=H in der Fouriertransformation
    - (Komplette Absorption [unendliche Dämpfung] aller höheren Frequenzen)
  - Die Anzahl der verschiedenen verwendeten Symbole ist V
  - Es treten keinerlei anderen Störungen, Verzerrungen oder Dämpfungen auf
- **Theorem von Nyquist**
  - Die maximal mögliche Symbolrate ist höchstens 2 H baud.
  - Die maximal mögliche Datenrate ist höchstens $2\ H \log_2 V$ bit/s.

Helfen mehr Symbole?

- **Nyquists Theorem besagt, dass rein theoretisch die Datenrate mit der Anzahl der verwendeten Symbole vergrößert werden könnten**

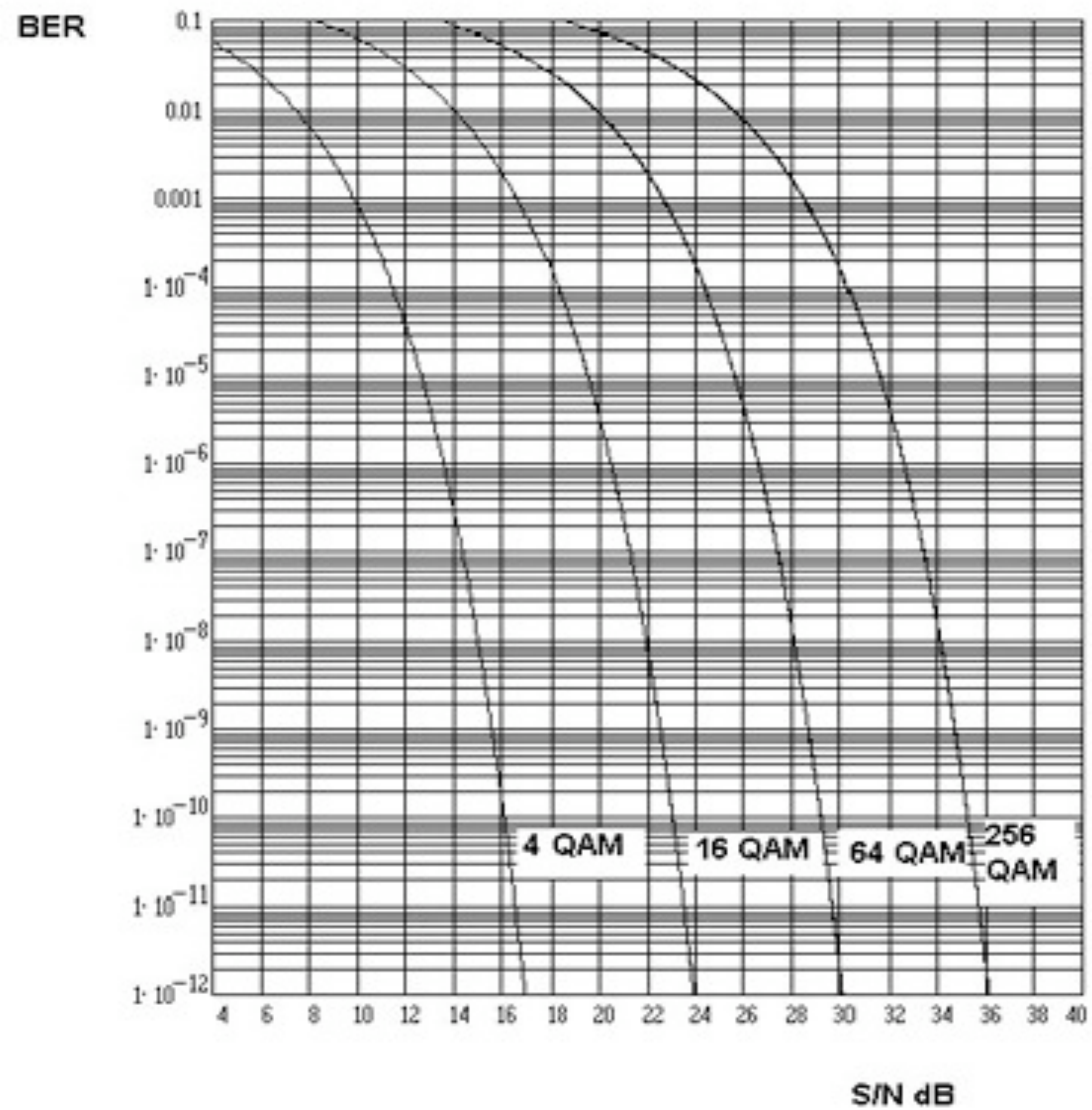
- **Diskussion:**
  - Nyquists Theorem liefert nur eine theoretische obere Schranke und kein Verfahren zur Übertragung
  - In der Praxis gibt es Schranken in der Messgenauigkeit
  - Nyquists Theorem berücksichtigt nicht das Problem des Rauschens

Der Satz von Shannon

- **Tatsächlich ist der Einfluss des Rauschens fundamental**
  - Betrachte das Verhältnis zwischen Sendestärke S zur Stärke des Rauschens N
  - Je weniger Rauschen desto besser können Signale erkannt werden
- **Theorem von Shannon**
  - Die maximale mögliche Datenrate ist $H \log_2 (1+S/N)$ bit/s
    - bei Bandweite H
    - Signalstärke S
- **Achtung**
  - Dies ist eine theoretische obere Schranke
  - Existierende Kodierungen erreichen diesen Wert nicht

Die Bitfehlerhäufigkeit und das Signalrauschverhältnis

- **Je höher das Signal-Rausch-Verhältnis, desto geringer ist der auftretende Fehler**
- **Bitfehlerhäufigkeit (bit error rate - BER)**
  - Bezeichnet den Anteil fehlerhaft empfangener Bits
- **Abhängig von**
  - Signalstärke,
  - Rauschen,
  - Übertragungsgeschwindigkeit
  - Verwendetem Verfahren
- **Abhängigkeit der Bitfehlerhäufigkeit (BER) vom Signal-Rausch-Verhältnis**
  - Beispiel: 4 QAM, 16 QAM, 64 QAM, 256 QAM



ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

Algorithmen für drahtlose Netzwerke

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

CoNe Freiburg

IIF INSTITUT FÜR INFORMATIK FREIBURG