

1. Klausur

in

**Einführung in Berechenbarkeit,
formale Sprachen und Komplexitätstheorie**

Name :

Matrikelnummer :

Punkteverteilung (bitte freilassen!)

Aufgabe 1		von 200
Aufgabe 2		von 200
Aufgabe 3		von 250
Aufgabe 4		von 250
Aufgabe 5		von 100
Zwischensumme		von 1000
Bonuspunkte		von 160
Gesamtsumme		von 1160

Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben und 18 Seiten. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein eigenhändig beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

Schreiben Sie Ihre Lösung bitte in die vorgesehenen Platzhalter. Sollte der Platz nicht ausreichen, erhalten Sie auf Anfrage weiteres Papier.

Aufgabe 1 (200 Punkte)

a) (100 Punkte)

Gegeben ist folgende Sprache:

$$L := \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \text{ enthält 110 und endet auf 0}\}$$

Ordnen Sie diese Sprache in die höchstmögliche Klasse der Chomsky-Hierarchie ein. Kreuzen Sie dazu den entsprechenden Typ an. Zeigen Sie, dass L in genau dieser Klasse ist und zeigen Sie, warum L nicht höher eingeordnet werden kann.

- Chomsky-0 (rekursiv aufzählbare Sprachen)
- Chomsky-1 (kontextsensitive Sprachen)
- Chomsky-2 (kontextfreie Sprachen)
- Chomsky-3 (reguläre Sprachen)

Fortsetzung von Aufgabe 1 a):



b) (100 Punkte)


Gegeben ist folgende Sprache:

$$L := \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ oder } i = k \text{ oder } j = k\}$$

Ordnen Sie diese Sprache in die höchstmögliche Klasse der Chomsky-Hierarchie ein. Kreuzen Sie dazu den entsprechenden Typ an. Zeigen Sie, dass L in genau dieser Klasse ist und zeigen Sie, warum L nicht höher eingeordnet werden kann.

- Chomsky-0 (rekursiv aufzählbare Sprachen)
- Chomsky-1 (kontextsensitive Sprachen)
- Chomsky-2 (kontextfreie Sprachen)
- Chomsky-3 (reguläre Sprachen)

Fortsetzung von Aufgabe 1 b):



Aufgabe 2 (200 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$. Es ist $V = \{S, U, W, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{x, y\}$ und die Menge P der Produktionen ist gegeben durch:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow XY \mid YZ \mid \epsilon & U \rightarrow x \\ X \rightarrow YX & Y \rightarrow y \\ Y \rightarrow ZZ & Z \rightarrow x \\ Z \rightarrow XY \\ X \rightarrow W \\ W \rightarrow U \end{array}$$

a) (50 Punkte)

Formen Sie die Grammatik G zunächst in Chomsky-Normalform um.

b) (100 Punkte)

Entscheiden Sie nun mit Hilfe des CYK-Algorithmus, ob das Wort $yxxyx$ in $L(G)$ liegt. Geben Sie hierfür die vom CYK-Algorithmus erzeugte Tabelle $T(i, j)$ an.

$l = 5$					
$l = 4$					
$l = 3$					
$l = 2$					
$l = 1$					

Platz für einen zweiten Versuch (gültigen Versuch kennzeichnen!):

$l = 5$					
$l = 4$					
$l = 3$					
$l = 2$					
$l = 1$					

Folgerung:

c) (50 Punkte)

Geben Sie alle Teilwörter des Wortes $yxxyx$ an, die in $L(G)$ liegen.

Aufgabe 3 (250 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Sprache L :

$$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens 3 Eingaben } x \text{ mit } |x| = 5\}$$

a) (100 Punkte)

Zeigen Sie, dass L rekursiv aufzählbar ist.

Fortsetzung von Aufgabe 3 a):



b) (100 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe einer Abbildungsreduktion, dass L nicht rekursiv ko-aufzählbar ist. Kreuzen Sie zunächst die Sprache an, die Sie für Ihre Reduktion verwenden möchten:

- $H = \{\langle M, x \rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } x\}$
- $A = \{\langle M, x \rangle \mid M \text{ akzeptiert Eingabe } x\}$
- $T = \{\langle M \rangle \mid M \text{ hält für jede Eingabe}\}$

Kreuzen Sie an, welche Aussagen für die von Ihnen gewählte Sprache gelten:

- Die Sprache ist rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
- Die Sprache ist entscheidbar.
 Richtig Falsch
- Die Sprache ist rekursiv ko-aufzählbar.
 Richtig Falsch
- Die Sprache liegt in \mathcal{P} .
 Richtig Falsch
- Die Sprache liegt in \mathcal{NP} .
 Richtig Falsch

Führen Sie nun die Reduktion durch:

Fortsetzung von Aufgabe 3 b):



c) (50 Punkte)

Könnte Aufgabenteil b) unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus Teil a) auch mit Hilfe des Satzes von Rice gelöst werden ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (250 Punkte)

Seien $G = (V_1, E_1)$ und $H = (V_2, E_2)$ zwei ungerichtete Graphen. G besitzt einen zu H isomorphen Subgraph, wenn die graphische Darstellung von H sich passend über einen Teil von G legen lässt. Dies wird durch eine bijektive Abbildung modelliert, die den entsprechenden Teil der Knoten $V \subseteq V_1$ auf die Knoten V_2 von H abbildet.

Formal: G besitzt einen zu H isomorphen Subgraph, wenn es Teilmengen $V \subseteq V_1$ und $E \subseteq E_1$ und eine bijektive Abbildung $f : V \mapsto V_2$ gibt, so dass $|V| = |V_2|$, $|E| = |E_2|$ und $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$.


Die Sprache SUBGRAPH ist nun wie folgt definiert:

$$\text{SUBGRAPH} := \left\{ \langle G, H \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ und } H \text{ sind ungerichtete Graphen und} \\ G \text{ enthält einen zu } H \text{ isomorphen Subgraphen} \end{array} \right\}$$

a) (100 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache SUBGRAPH in \mathcal{NP} liegt.

Fortsetzung von Aufgabe 4 a):



b) (150 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache SUBGRAPH \mathcal{NP} -vollständig ist. Kreuzen Sie zunächst an, welche der folgenden \mathcal{NP} -vollständigen, Ihnen bekannten Sprachen Sie für Ihre Reduktion verwenden wollen:

- 3SAT := $\{ \langle \phi \rangle \mid \phi \text{ ist eine erfüllbare Funktion in 3-CNF} \}$
- CLIQUE := $\left\{ \langle G, k \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer Clique} \\ \text{der Größe mindestens } k \end{array} \right\}$
- VERTEXCOVER := $\left\{ \langle G, k \rangle \mid \begin{array}{l} G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit einer} \\ k\text{-Knotenüberdeckung} \end{array} \right\}$

Führen Sie nun die Reduktion durch:

Fortsetzung von Aufgabe 4 b):



Aufgabe 5 (100 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne Begründung. Für jede richtige Antwort gibt es 10 Pluspunkte, für jede falsche 10 Minuspunkte. Nicht beantwortete Fragen erhalten null Punkte. Sie können insgesamt für diese Aufgabe nicht weniger als null Punkte erreichen.

1. Reguläre Sprachen können in linearer Zeit entschieden werden.
 Richtig Falsch
2. Jede Chomsky-1-Grammatik ist kontextfrei.
 Richtig Falsch
3. Sei L_1 eine kontextfreie Sprache. Dann gilt für $L_2 \subseteq L_1$, dass L_2 ebenfalls kontextfrei ist.
 Richtig Falsch
4. Jede Sprache in \mathcal{NP} ist rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
5. Für jede Sprache, für die es eine Chomsky-0-Grammatik gibt, lässt sich auch eine nichtdeterministische Turingmaschine angeben, die diese Sprache entscheidet.
 Richtig Falsch
6. Falls es einen polynomiellen Algorithmus für SUBSET-SUM gibt, gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
 Richtig Falsch
7. Die Beschreibungskomplexität einer Zeichenkette ergibt sich aus der Länge der Zeichenkette multipliziert mit einem ganzzahligen Faktor c .
 Richtig Falsch
8. Gegeben sei die Sprache
$$\text{DOZENT} := \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert keine Eingabe außer der eigenen Codierung} \}$$

Die Sprache DOZENT ist leer.
 Richtig Falsch
9. Wir wissen, dass für eine Sprache L gilt: $\overline{H} \leq_T L$. Also ist L nicht rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
10. Für alle Sprachen in \mathcal{P} hat der beste bekannte Algorithmus eine Laufzeit von $O(2^n)$.
 Richtig Falsch