Peer-to-Peer-Netzwerke

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Christian Schindelhauer

Sommersemester 2006

18. Vorlesung

06.07.2006

schindel@informatik.uni-freiburg.de

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

III. Zufallsgraphen
A. Typ und Eigenschaften

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Standardmodell G(n,p)**
- **Zufälliger regulärer ungerichteter Graph**
- **Zufälliger regulärer gerichteter Graph**

Ist ein Pareto-Graph ein Zufallsgraph

- **Zufallsgraph G(n,p)**
  - n Knoten
  - Jede gerichtete Kante erscheint mit Wahrscheinlichkeit p
- **Sei X die Anzahl der Kanten, ausgehend von einem Knoten v**
  - X_u =1 falls Kante (v,u) existiert und sonst 0
    - Dann ist $P[X_u=1]=p$ und $P[X_u=0]=1-p$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$$

- **Für durchschnittlichen Grad c gilt dann:**

$$p \leq \frac{c}{n-1}$$

Gradverteilung des Zufallsgraphen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

- **Chernov-Schranke**
  - Für unabhängige Bernoulli-Variablen X_i und $\delta \geq 0$: mit $X_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$

$$\mathrm{P}[X_m \geq (1+\delta)\mathbf{E}[X_m]] \leq e^{-\frac{\delta^2 \mathbf{E}[X_m]}{2+\frac{2\delta}{3}}} \leq e^{-\frac{1}{3}\min\{\delta,\delta^2\}\mathbf{E}[X_m]}.$$

  - Daraus folgt für $\delta = \frac{k}{c} - 1 \geq 1$

$$\mathrm{P}[X \geq k] = \mathrm{P}[X \geq (1+\delta)\mathbf{E}[X]] \leq e^{-c\delta/3} = e^{-(k-c)/3}$$

  - Die Häufigkeit nimmt exponentiell ab
  - Daher entspricht der Grad eines Zufallsgraphens keiner Paretoverteilung

III. Zufallsgraphen
B. Regulär, Ungerichtet

- **Peter Mahlmann, Christian Schindelhauer, *Peer-to-Peer Networks based on Random Transformations of Connected Regular Undirected Graphs*, 17th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures 2005,155-164 (SPAA 2005)**

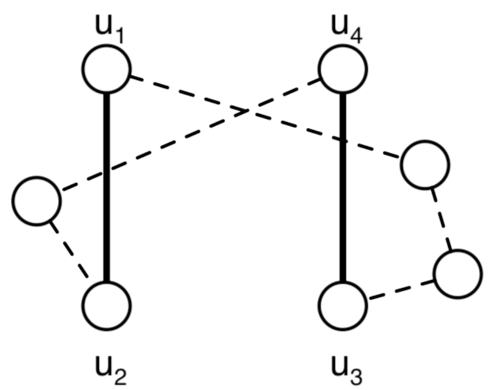
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

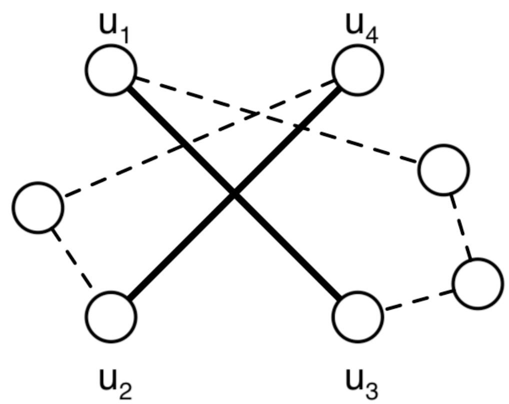
Zufällige Graphen

- **sind einfach, robust und Expander-Graphen (mit hoher Wahrscheinlichkeit)**
- **werden z.B. in SUNs JXTA P2P-Netzwerk-Umgehung verwendet**
- **Welche Operation erzeugt und unterhält einen zufälligen Graphen?**

Simple Switching für ungerichtete Graphen

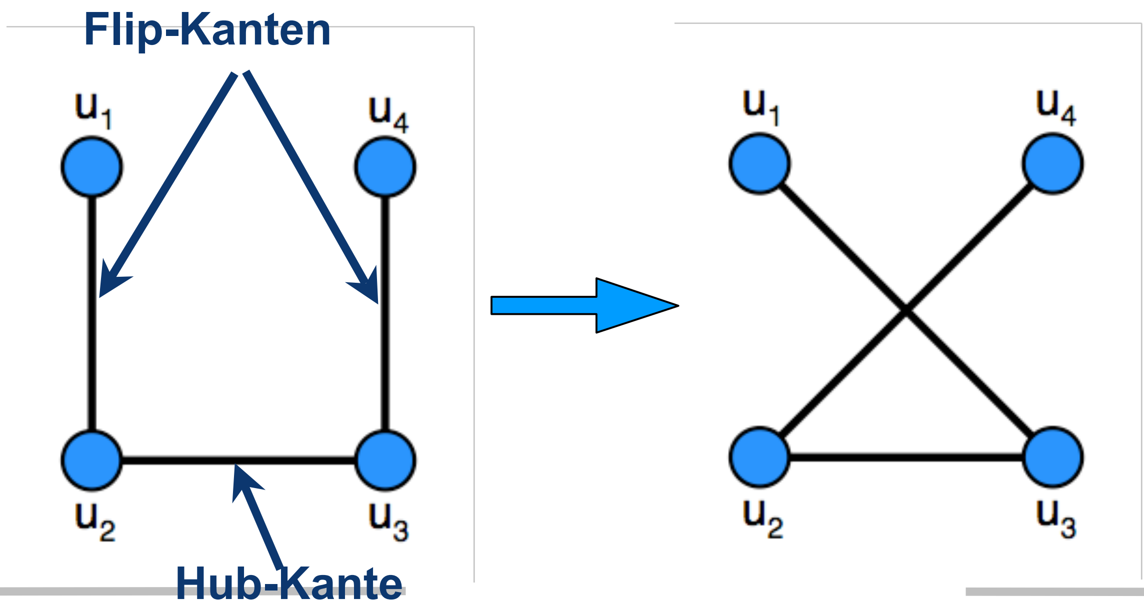
- **Simple Switching**
  - wähle zwei zufällige Kanten
    - $\{u_1,u_2\} \in E$
    - $\{u_3,u_4\} \in E$
  - so dass $\{u_1,u_3\}$, $\{u_2,u_4\} \notin E$
    - Füge Kanten $\{u_1,u_3\}$, $\{u_2,u_4\}$ zu E hinzu
    - Entferne $\{u_1,u_2\}$ und $\{u_3,u_4\}$ von E
- **McKay, Wormald, 1990**
  - Simple Switching konvergiert zu einem Zufallsnetzwerk
  - Konvergenzgeschwindigkeit:
    - $O(nd^3)$ für $d \in O(n^{1/3})$
- **Simple Switching kann nicht in Peer-to-Peer Netzwerken verwendet werden**
  - Simple Switching zertrennt den Graphen (mit positiver Wahrscheinlichkeit)
  - Keine Netzwerkoperation kann getrennte P2P-Netzwerke wieder verbinden





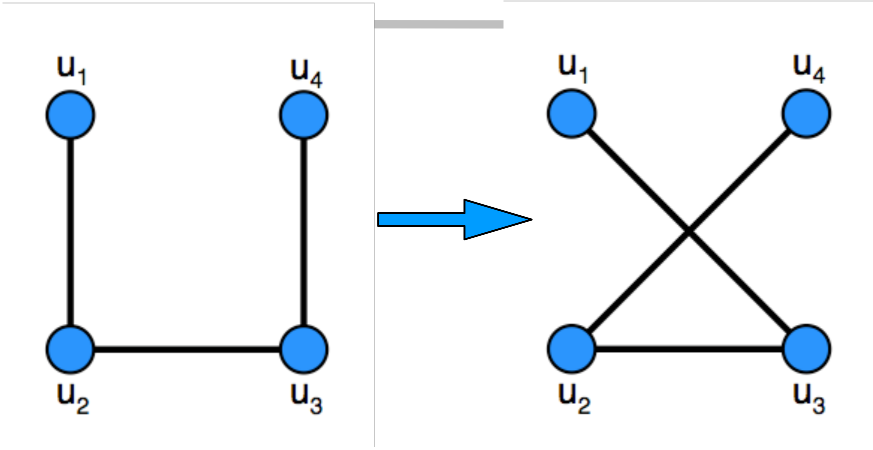
Der 1-Flipper

- **1-Flipper:**
  - Wähle zufällige Kante $\{u_2,u_3\} \in E$
  - Wähle zufällige Kante $u_1 \in N(u_2) \setminus \{u_3\}$
  - Wähle zufällige Kante $u_4 \in N(u_3) \setminus \{u_2\}$
  - Falls $\{u_1,u_3\}, \{u_2,u_4\} \notin E$ // flip edges
    - Füge Kanten $\{u_1,u_3\}, \{u_2,u_4\}$ zu E hinzu
    - Lösche $\{u_1,u_2\}$ und $\{u_3,u_4\}$ aus E



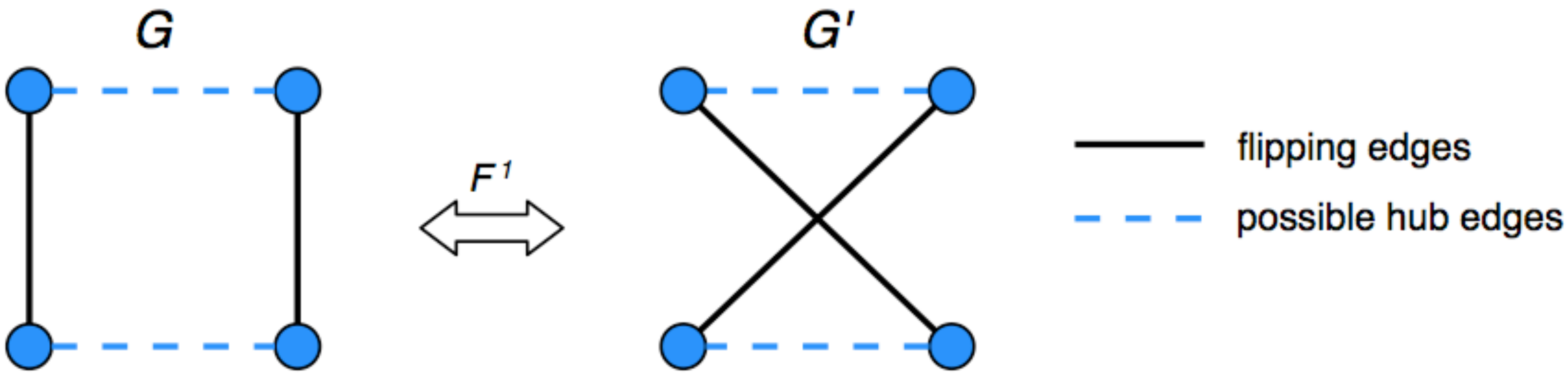
Eigenschaften von 1-Flipper

- -1-Flipper erhält d-reguläre Graphen
- -1-Flipper trennt keine Graphen



Lemma (Symmetrie):
Für alle ungerichtete reguläre Graphen G,G':

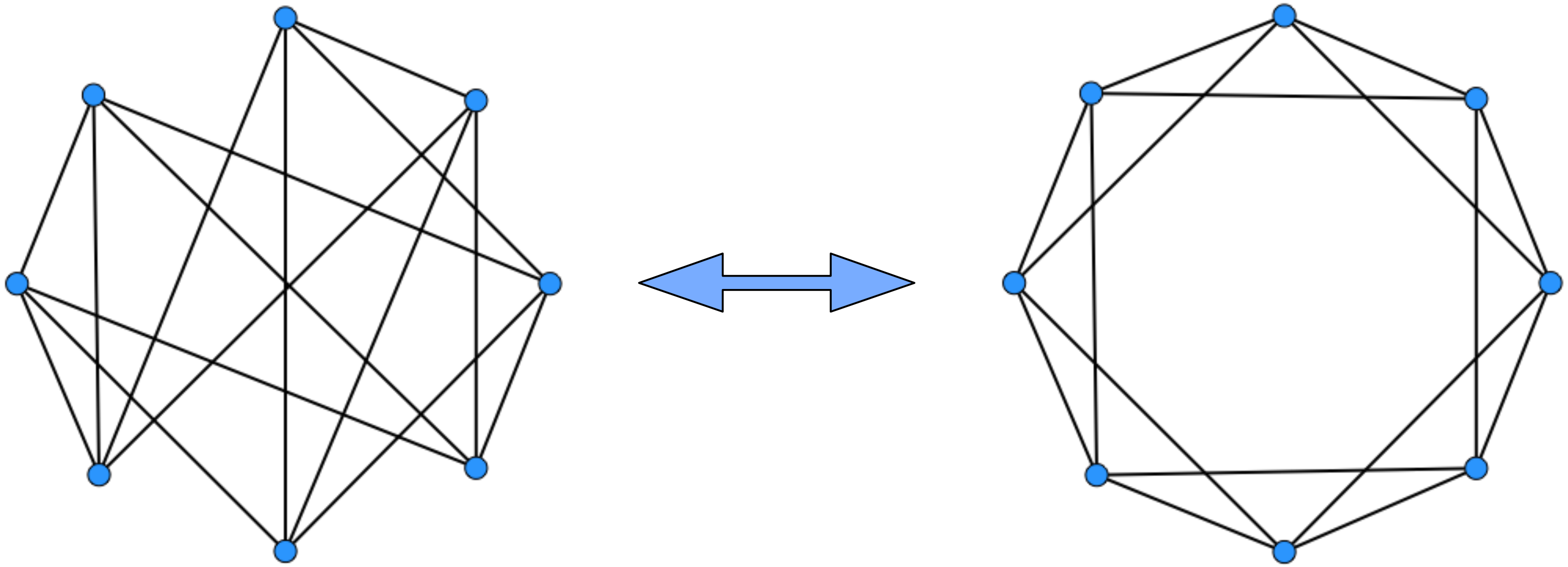
$$P[G \xrightarrow{F^1} G'] = P[G' \xrightarrow{F^1} G]$$



Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Lemma

Jeder reguläre zusammenhängende Graph G kann in jeden anderen regulären zusammenhängenden Graph G' mittels 1-Flipper umgeformt werden.



Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Theorem

Im Limes erzeugt 1-Flipper jeden d-regulären zusammenhängenden Graph mit n Knoten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit

$$\lim_{t \to \infty} P[G_0 \xrightarrow{t} G] = \frac{1}{|\mathcal{C}_{n,d}|}$$

III. Zufallsgraphen
C. Regulär, Gerichtet

- **Peter Mahlmann, Christian Schindelhauer, *Distributed Random Digraph Transformations for Peer-to-Peer Networks*, erscheint auf 18th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures, Cambridge, MA, USA. July 30 - August 2, 2006**

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Institut für Informatik
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

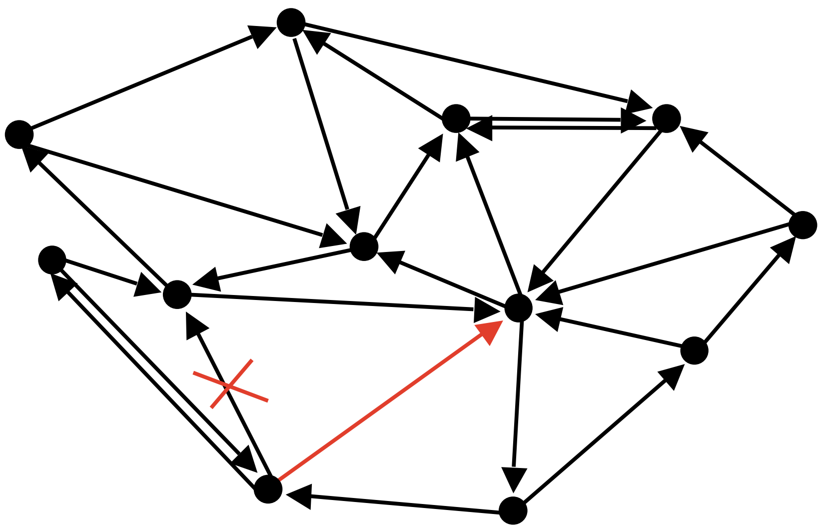
Gerichtete Graphen

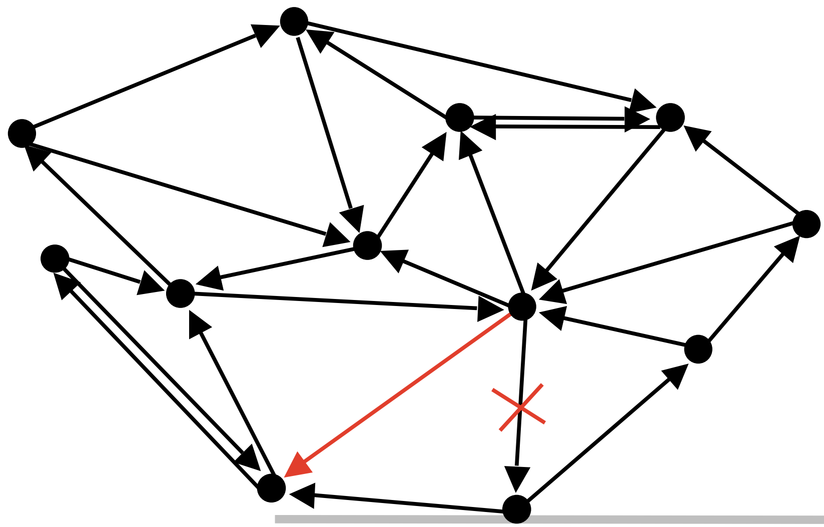
Push Operation:

1. Choose random node *u*
2. Set *v* to *u*
3. While a random event with p= 1/*h* appears
   a) Choose random edge starting at *v* and ending at *v*‘
   b) Set *v* to *v*‘
4. Insert edge (*v*,*v*‘)
5. Remove random edge starting at *v*

Pull Operation:

1. Choose random node *u*
2. Set *v* to *u*
3. While a random event with p= 1/*h* appears
   a) Choose random edge starting at *v* and ending at *v*‘
   b) Set *v* to *v*‘
4. Insert edge (*v*‘,*v*)
5. Remove random edge starting at *v*‘





Ende der 18. Vorlesung

CoNe Freiburg

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Rechnernetze und Telematik
Prof. Dr. Christian Schindelhauer

Peer-to-Peer-Netzwerke

Christian Schindelhauer
schindel@informatik.uni-freiburg.de